Парипса В. Г.
студент спеціальності 111 Математика
факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М. П. Драгоманова
Науковий керівник: кандидат педагогічних наук, доцент **Лук'янова С. М.**

«ІМЕННІ» ТЕОРЕМИ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Анотація. В статті розглянуто питання доповнення курсу геометрії основної школи теоремами, які носять імена відомих вчених. Наведено добірки задач, які, на думку автора, доцільно розв'язувати з використанням вказаних теорем. Зроблено висновки, що вивчення «іменних теорем» допоможе учням більше дізнатись про історію математики, сприятиме активізації пізнавальної діяльності учнів та підвищенню рівня математичної грамотності.

Ключові слова. «Іменні теореми», добірка задач, пізнавальна діяльність, теорема Варіньона, теорема Птолемея.

Abstract. The article considers the issue of supplementing the course of geometry of primary school with theorems bearing the names of famous scientists. There are selections of problems that should be solved using the above theorems. It is concluded that the study of "nominal theorems" will help students learn more about the history of mathematics, will enhance the cognitive activity of students and increase the level of mathematical literacy.

Keywords. "Nominal theorems", a set of problems, cognitive activity, Varignon's theorem, Ptolemy's theorem.

Вступ. Як показує шкільна практика вивчення систематичних курсів алгебри і геометрії, учні менше часу витрачають на засвоєння нового алгебраїчного матеріалу чи вивчення нових способів розв'язування рівнянь, нерівностей тощо, ніж на опанування нової теми з геометрії (наприклад, доведення теореми) та розв'язування задач на застосування нової теореми.

Серед основних причин науковці і методисти називають: по-перше, вивчення геометрії відбувається на основі широкого застосування дедуктивних міркувань на відміну від вивчення алгебраїчного матеріалу; по-друге, розв'язування рівнянь, побудова графіків функцій і т.д. є завданнями, які певним чином розв'язуються з використанням конкретних алгоритмічних кроків, а для розв'язування геометричної задачі досить часто потрібно переосмислити значну кількість теоретичного матеріалу та способів розв'язування; по-третє, вважаємо, що негативний вплив на засвоєння теорем та їх використання має відсутність влучних назв або розміщення теорем у розділах задачного матеріалу. Для прикладу, напевно не має жодного випускника ЗОШ, який би не знав про теорему Піфагора. Влучна назва теореми викликає асоціації як із формулюванням самої теореми, так і з задачами, які можна розв'язати з її використанням. До того ж під час вивчення цієї теореми у вчителя є чудова нагода познайомити учнів з історією математики, а також запропонувати учням виконати проекти та тему «Різні способи доведення теореми Піфагора» [4] чи «Піфагор – вчений і філософ» тощо. Виконання таких проектів сприяє розвитку пізнавального інтересу учнів до вивчення цієї теми зокрема і геометрії взагалі. А як відомо, зацікавлений у вивченні теми учень має і кращі результати у навчанні.

Виклад основного матеріалу. У шкільних підручниках базового рівня, наприклад, [1] традиційно вивчаються теореми Фалеса, Піфагора та наводиться добірки задач (з поступовим ускладненням) на застосування цих теорем. Окрім згаданих теорем і підручнику поглибленого рівня [2] вивчають теореми Чеви, Менелая, Ейлера. На нашу думку, ці теореми можна пропонувати і учням, що вивчають геометрію на базовому рівні, у розділі «Для тих, хто хоче знати більше».

Оскільки теорема краще запам'ятовується під час її використання до розв'язування задач, то розглянемо для прикладу теорему Чеви та наведемо зразки задач, які можна пропонувати для розв'язування учням базового рівня. Зауважимо, теорему Чеви вивчати слід після ознак подібності трикутників.

Теорема Чеви. Нехай в $_{\Delta}ABC$ на сторонах BC, AC, AB або їх продовжені взято відповідно точки A_1, B_1, C_1, що не співпадають з вершинами трикутника. Прямі AA_1, BB_1, CC_1перетинаються в одній точці або паралельні *тоді і лише тоді,* коли виконується рівність: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Доведення. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 перетинаютсья в точці O. Розглянемо випадок, при якому точки A_1, B_1, C_1 лежать на відрізках BC, AC, AB відповідно. Проведемо через вершину В пряму a паралельну до AC так як зображено на рис.1

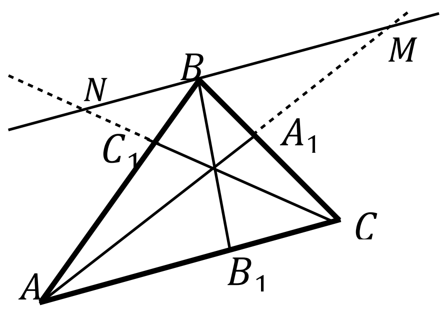

Рис.1. Теорема Чеви.

Нехай $AA_1 \cap a = M, CC_1 \cap a = N$. Помітимо, що $_{\Delta}AA_1C \sim_{\Delta} MA_1B$ за I ознакою подібності($\angle AA_1C = \angle MA_1B$ як вертикальні, $\angle CAA_1 = \angle BMA_1$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих a і AC та січній AM). Звідси випливає, що

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{BM} \qquad (1)$$

Аналогічно з того, що

$$_{\Delta}AC_1C \sim_{\Delta} BC_1N \Rightarrow \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BN}{AC} \qquad (2),$$

$$_{\Delta}AOB_1C \sim_{\Delta} MOB \Rightarrow \frac{AB_1}{BM} = \frac{OB_1}{OB} \qquad (3),$$

$$_{\Delta}B_1OC \sim_{\Delta} BON \Rightarrow \frac{B_1C}{NB} = \frac{0B_1}{OB} \qquad (4).$$

З тверджень (3), (4) отримаємо рівність $\frac{AB_1}{BM} = \frac{B_1C}{NB}$ або $\frac{A_1B}{B_1C} = \frac{BM}{NB}$ (5). Якщо ми перемножимо відповідно ліві і праві частини (1), (2) і (5) тверджень, то отримаємо відповідно:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{BM} \cdot \frac{BN}{AC} \cdot \frac{BM}{BN} = 1.$$

Теорему доведено.

На застосування теореми Чеви можна запропонувати наступні задачі. *Задача 1.* Довести, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Задачі 2. В трикутник ABC вписано півколо так, що його діаметр лежить на стороні BC, а дуга дотикається до сторін AB і AC в точках C_1 і B_1 відповідно. Довести, що прямі BB_1 і CC_1 перетинаються на висоті AA_1 трикутника.

Доведення. З умови задачі випливає, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на сторонах трикутника ABC. Отже, достатньо довести, що $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$

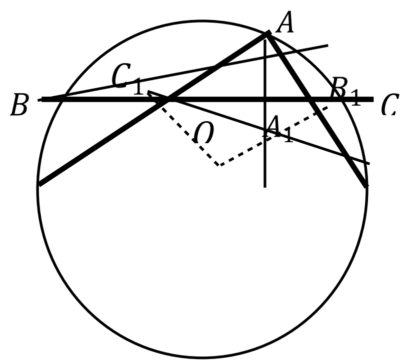

Рис. 2

Центр O півкола з'єднаємо з точками дотику C_1 та B_1 (див. рис. 2). Позначимо через r радіус кола, з прямокутних трикутників OB_1C і OBC_1 знаходимо:

$$B_1C = r \cdot ctg\angle C, \quad BC_1 = r \cdot ctg\angle B,$$

з прямокутних трикутників ABA_1 та AC_1A маємо:

$$BA_1 = AA_1 \cdot ctg\angle B, A_1C = AA_1 \cdot ctg\angle C.$$

Зазначимо, що відрізки AB_1 та AC_1 дотичні для кола, отже отримаємо: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{ctg\angle B}{ctg\angle C} \cdot \frac{ctg\angle C}{ctg\angle B} = 1.$

Отже, за теоремою Чеви прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Задача 3. Задано трикутник АВС. Як слід взяти точку О всередині трикутника, щоб площі трикутників АОС, ВОС та АОВ відносилися як 7 : 11 : 13?

Зауважимо, що у підручниках для класів з поглибленим вивченням математики ще пропонують тригонометричну форму теореми Чеви у 9 класі [3,с.36], як додаткову тему без задач на її застосування.

На відміну від теореми Чеви теорема Варіньона та наслідки з неї присутні у шкільних підручниках серед задач теми «Чотирикутники» на застосування ознак паралелограма, ромба та прямокутника.

Теорема Варіньона. Чотирикутник, що утворений шляхом послідовного з'єднання середин сторін опуклого чотирикутника, є паралелограмом, і його площа рівна половині площі даного чотирикутника.

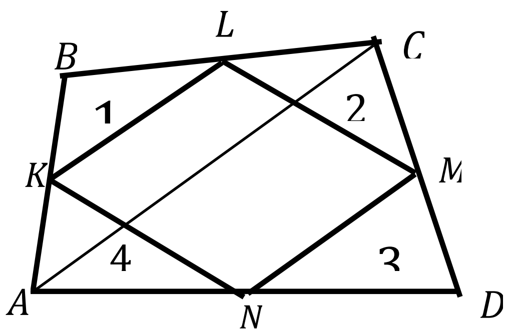

Рис. 3

Доведення.

1. Розглянемо сторони чотирикутника KLMN.

KL — середня лінія трикутника АВС (за означенням), тому, $KL \parallel AC$. Аналогічно, так як MN — середня лінія трикутника ADC, то $MN \parallel AC$.

Так як $KL \parallel AC$ і $MN \parallel AC$, з цього слідує, що $KL = MN = \frac{AC}{2}$. Таким чином, $KLMN$ — паралелограм. Цей паралелограм називається паралелограмом Варіньона даного чотирикутника.

2. Для доведення другої частини теореми використаємо твердження, середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник, площа якого в чотири рази менша площі вихідного трикутника.

3. Тобто $S_{KBL} = \frac{S_{ABC}}{4}, S_{MDN} = \frac{S_{ADS}}{4}$. Тому $S_1 + S_3 = \frac{S_{ABCD}}{4}$.

Аналогічно $S_2 + S_4 = \frac{S_{ABCD}}{4}$, з цього зробимо висновок:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{S_{ABCD}}{4} + \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

Що і потрібно було довести.

Наведемо добірку задач до теореми Варіньона.

Задача 1. Довести, що середини сторін неопуклого чотирикутника є вершинами паралелограма.

Задача 1.* Довести, що у самопересічної замкненої ламаної середини сторін (ланок) є вершинами паралелограма або лежать на одній прямій.

Задача 2. Доведіть . що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

Задача 3. Довести, що паралелограм Варіньона являється прямокутником тоді і лише тоді, коли в вихідному чотрикутнику: 1) діагоналі рівні, 2) бімедіани перпендикулярні.

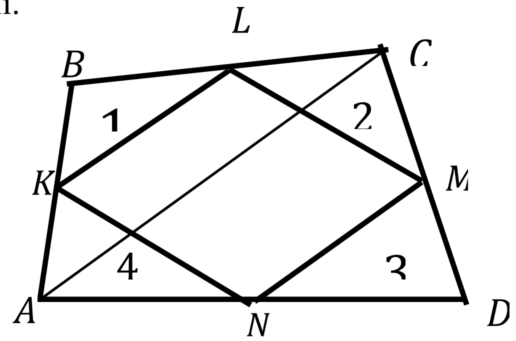

Рис. 4

Доведення.

1) Так як $AC = BD$ (за умовою), то сторони паралелограма варіньона будут рівні $KL = LM = MN = NK$ (використовуючи властивість середніх ліній трикутника, утворениї при перетині діагоналей вихідного чотирикутника). Тоді це паралелограм з рівними сторонами, тобто ромб.

2) Бімедіани вихідного чотирикутника — це діагоналі паралелограма Варіньона. Так як в паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то цей паралелограм являється ромбом (за ознакою ромба). Що і необхідно було довести.

Дана властивість є наслідком з теореми Варіньона.

Задача 4. Доведіть, що якщо у чотирикутника діагоналі рівні, то його площа рівна добутку середніх ліній.

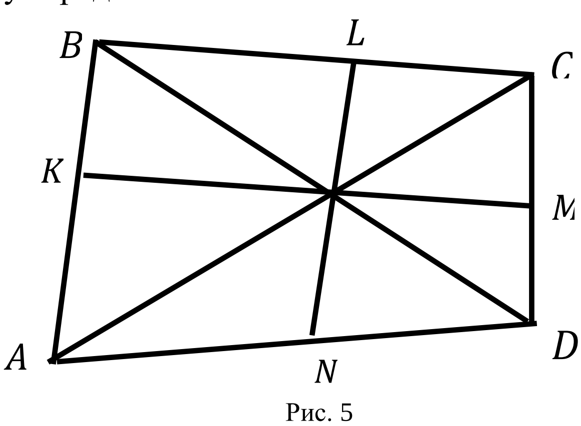

Рис. 5

Доведення. ABCD — чотирикутник, $AC = BD$, доведемо $S_{ABCD} = KM \cdot LN$.Так як діагоналі $AC = BD$, паралелограм Варіньона являється ромбом(див. попередню задачу) площа ромба рівна половині добутку його діагоналей. Що і необхідно було довести.

Задача 5. Довести , що паралелограм Варіньона являється прямокутником тоді і лише тоді, коли в вихідному чотрикутнику: 1) діагоналі перпендикулярні, 2) бімедіани рівні.

Задача 6 (теорема Ейлера). У чотирикутнику сума квадратів усіх сторін дорівнює сумі квадратів діагоналей плюс почетверений квадрат відрізка, що сполучає середини діагоналей.

Взагалі, П'єр Варіньйон народився у Франції у 1654 році. Навчався в єзуїтському коледжі та університеті в Кані, де став магістром у 1682 році. Варіньйон готувався до релігійної діяльності, але, вивчаючи твори Евкліда і Декарта, захопився математикою та механікою. Праці Варіньйона присвячені теоретичній механіці, аналізу нескінченно малих, геометрії, гідромеханіки та фізики. Варіньйон був одним із перших учених, які ознайомили Францію з аналізом нескінченно малих. Наприкінці 17 та на початку 18 ст. Варіньйон керував «Журналом учених», в якому поміщали свої роботи з обчислення нескінченно малих братів Бернуллі. У геометрії Варіньйон вивчав різні спеціальні криві, зокрема, ввів термін «логарифмічна спіраль». Основні досягнення Варіньона ставляться до теоретичної механіки, саме до геометричній статиці. У 1687 Варіньйон представив «Проект нової механіки...», у якому сформулював закон паралелограма сил. У 1725 в Парижі був виданий трактат Варіньйона «Нова механіка або статика», що є систематичним викладом вчення про складання і розкладання сил, про моменти сил і правила оперування ними, що майже без змін збереглося в підручниках статики до нашого часу. Написав підручник з елементарної геометрії (виданий у 1731).

Цікавою і корисною для розвитку пізнавальної активності учнів, на нашу думку, є теорема Птолемея.

У всякому чотирикутнику, вписаному в коло, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

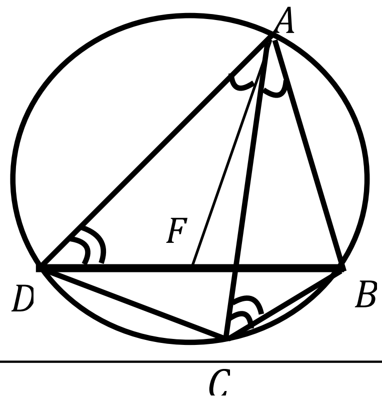

Рис. 6

Доведення. Чотирикутник ABCD вписаний у коло. Доведемо, що

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + DC \cdot AB.$$

$\angle ADB = \angle ACB$ так як спираються на одну дугу. Проведемо відрізок AF (точка $F \in BD$) так, щоб $\angle DAC = \angle CAB$. Тоді $_\Delta ABC \sim_\Delta AFD$ за двома кутами. Звідси $AD: AC = DF: BC$, тобто $AD \cdot BC = AC \cdot DF$.

$\angle DCA = \angle DBA$ так як спираються на одну дугу, а $\angle DAC = \angle FAB$. Тоді $_\Delta DAC \sim_\Delta FAB$ за двома кутами. Звідси $AC: AB = DC: FB$, тобто

$$AC \cdot FB = AB \cdot DC$$

Додамо рівності і одержимо: $AC(DF + FB) = AD \cdot BC + AB \cdot DC$. Отже, $AC \cdot BD = AD \cdot BC + DC \cdot AB$. Що і необхідно було довести.

Розглянемо систему вправ на виконання цієї теореми:

Задача 1. На колі, описаному навколо рівностороннього трикутника ABC, взято довільну точку X. Доведіть, що найбільший з відрізків XA, XB, XC дорівнює сумі двох інших.

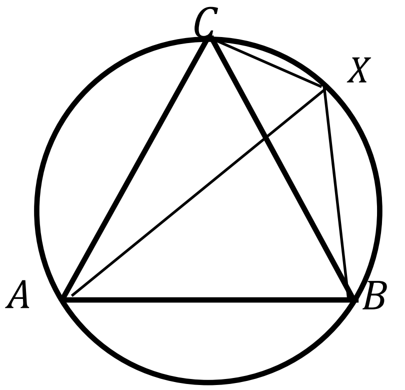

Рис. 7

Розв'язання. Нехай найбільший відрізок буде XA. Доведемо, що$XB = XC + XA$. За теоремою Птолемея $XA \cdot AC = XB \cdot BC + XC \cdot AB$. За умовою $_\Delta ABC$ — рівносторонній, тому $AB = BC = AB$, звідси $XA \cdot AC = XB \cdot AC + XC \cdot AC$, тому $XA = XB + XC$, що і слід було довести.

Задача 2. У гострокутному трикутнику ABC висоти BD і AM перетинаються в точці O. Доведіть, що $BO \cdot OD = AO \cdot OM$.

Задача 3. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане коло в точці W. Доведіть, що $AB + AC < 2 \cdot AW$.

Розв'язання. За властивістю бісектриси $\angle CAW = \angle WAB$. Звідси $WC = BW$. За нерівністю трикутника $CW + WB > BC$. Тоді $2CW > BC; CW > \frac{1}{2}BC$. Чотирикутник ABWC вписаний у коло, то за теоремою Птолемея $AW \cdot BC = AB \cdot WC + BW \cdot AC$. Тоді

$$AW \cdot BC = AB \cdot WC + WC \cdot AC, AW \cdot BC = WC \cdot (AB + AC),$$

$$AW \cdot BC > \frac{1}{2} BC \cdot (AB + AC), \quad AW > \frac{1}{2} \cdot (AB + AC), \quad 2 \cdot AW > AB + AC.$$

Що і необхідно було довести.

Висновок. Наразі можемо зробити висновок, що є цікаві теореми, якими можна розширити шкільну програму систематичного курсу геометрії так, щоб учням було простіше та цікавіше розв’язувати різні типи задач, а саме «іменні теореми», які краще відкладаються в пам’яті дітей через свою назву, яка пов’язана з іменем відомого математика. Окрім того вважаємо, що такі «іменні теореми» також можна розглядати на заняттях математичного гуртка для учнів 8-9-х класів [4, с.104], які навчаються за базовими підручниками, або пропонувати учнівські проекти.

Список використаних джерел

1. Геометрія: підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — 2-ге видання, переробл. — Х.: Гімназія, 2021. — 208 с.:іл.

2. Геометрія: підруч. для 8 кл. з погл. вивч. матем. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — 2-ге видання, переробл. — Х.: Гімназія, 2021. — 223 с.:іл.

3. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математикики : підруч. для 9 кл. Загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 304 с.: іл.

4. Лук’янова Світлана, Соколовська Ірина Позакласні заходи з математики. Основна школа / Світлана Лук’янова, Ірина Соколовська. — К.:Шк. Світ, 2011. —128 с. — (Бібліотека "Шкільного світу").

5. Посилання на джерело — [https://naurok.com.ua/urok-teorema-menelaya-teorema-chevi-132685.html]

6. Посилання на джерело — [https://urok.1sept.ru/articles/644122].