Васьковська О.О.
студентка спеціальності «111 Математика»
факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М. П. Драгоманова
Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент **Пафик С.П.**

УЗАГАЛЬНЕННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ

Анотація. У даній роботі досліджується питання побудови загального розв'язку узагальненого спеціального рівняння Ріккаті.

Ключові слова. Узагальнене спеціальне рівняння Ріккаті, загальний розв'язок узагальненого спеціального рівняння Ріккаті.

Abstract. The article investigates the question of constructing a general solution of the generalized special Riccati equation.

Key words. Generalized special Riccati equation, general solution of the generalized special Riccati equation.

Постановка задачі. Розглянемо рівняння

$$(y')^n = ax^m y^2 + bx^k, x > 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Рівняння (1) називатимемо узагальненим спеціальним рівнянням Ріккаті. Дослідимо, при яких співвідношеннях степенів незалежної змінної m і k рівняння зводиться до квазіоднорідного.

Побудова загального розв'язку рівняння (1). Нехай n=1. Тоді рівняння (1) має вигляд:

$$y' = ax^m y^2 + bx^k,$$

Розглянемо функцію:

$$f(x; y) = ax^m y^2 + bx^k.$$

Тоді:

$$f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = a\lambda^{m+2\sigma} x^m y^2 + b\lambda^k x^k = \lambda^{\sigma-1} f(x; y)$$

Має виконуватись співвідношення:

$$2\sigma + m = k = \sigma - 1.$$

Отже, m – довільне, k=-m-2, σ=-m-1. Таким чином отримуємо:

$$y' = ax^m y^2 + bx^{-m-2} (m \in \mathbb{Z}) - \tag{2}$$

квазіоднорідне рівняння.

Тоді, використовуючи заміну залежної змінної

$$y = \frac{u}{x^{m+1}},$$

де u – нова залежна змінна від $x > 0$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{-m-1}{x^{m+2}} u + \frac{1}{x^{m+1}} u' = ax^m \frac{u^2}{x^{2m+2}} + b \frac{1}{x^{m+2}}; \tag{3}$$

$$-(m+1)u + xu' = au^2 + b;$$
$$xu' = au^2 + (m+1)u + b;$$
$$\frac{du}{au^2 + (m+1)u + b} = \frac{dx}{x}, au^2 + (m+1)u + b \neq 0, x \neq 0;$$
$$\int \frac{du}{au^2 + (m+1)u + b} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \ln C = const, C > 0.$$

Зауважимо, що серед рівнянь $au^2 + (m+1)u + b = 0, x = 0$ можуть бути частинні або особливі розв'язки рівняння (3). Зробивши обернену заміну

$$u = x^{m+1}y,$$

отримаємо загальний розв'язок рівняння (2).

При n=2 рівняння (1) не зводиться до квазіоднорідного рівняння.

Розглянемо n=3. Тоді рівняння (1) має вигляд:

$$(y')^3 = ax^m y^2 + bx^k,$$

Розглянемо функцію:

$$f(x;y) = \sqrt[3]{ax^m y^2 + bx^k}.$$

Тоді:

$$f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = \sqrt[3]{a\lambda^{m+2\sigma} x^m y^2 + b\lambda^k x^k} = \lambda^{\sigma-1} f(x;y)$$

Має виконуватись співвідношення:

$$\frac{2\sigma + m}{3} = \frac{k}{3} = \sigma - 1.$$

Отже, m – довільне, k=3m+6, σ=m+3. Таким чином отримуємо:

$$y' = \sqrt[3]{ax^m y^2 + bx^{3m+6}} \ (m \in \mathbb{Z}) - \tag{4}$$

квазіоднорідне рівняння.

Тоді, використовуючи заміну залежної змінної

$$y = x^{m+3}u,$$

де u – нова залежна змінна від $x > 0$, рівняння (4) стає рівнянням з відокремленими змінними:

$$(m+3)x^{m+2}u + x^{m+3}u' = \sqrt[3]{ax^{3m+6}u^2 + bx^{3m+6}},$$
$$(m+3)u + xu' = \sqrt[3]{au^2 + b},$$
$$xu' = \sqrt[3]{au^2 + b} - (m+3)u \ \mid \ \div x(\sqrt[3]{au^2 + b} - (m+3)u) \neq 0,$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{au^2 + b} - (m+3)u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \ln C = const, C > 0.$$

Зауважимо, що серед рівнянь $\sqrt[3]{au^2 + b} - (m+3)u = 0, x = 0$ можуть бути частинні або особливі розв'язки рівняння (4). Зробивши обернену заміну

$$u = x^{-m-3}y,$$

отримаємо загальний розв'язок рівняння (4).

Тепер розглянемо рівняння (1) при $n \in \mathbb{N}, n \neq 2$.

Варто звернути увагу, що є два випадки:

$$y' = \sqrt[n]{ax^m y^2 + bx^k} \text{ при } n = 2k-1, k \in \mathbb{N};$$

$$y' = \pm\sqrt[n]{ax^m y^2 + bx^k} \text{ при } n = 2k, k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо

$$f(x;y) = \sqrt[n]{ax^m y^2 + bx^k}.$$

Тоді:

$$f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = \sqrt[n]{a\lambda^{m+2\sigma}x^m y^2 + b\lambda^k x^k} = \lambda^{\sigma-1} f(x;y)$$

Звідси має виконуватись співвідношення:

$$\frac{2\sigma + m}{n} = \frac{k}{n} = \sigma - 1.$$

Отже, m – довільне, $k = \frac{n(m+2)}{n-2}$, $\sigma = \frac{n+m}{n-2}$. Таким чином отримуємо:

$$y' = \sqrt[n]{ax^m y^2 + bx^{\frac{n(m+2)}{n-2}}} \text{ при } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}; \quad (5)$$

$$y' = \pm\sqrt[n]{ax^m y^2 + bx^{x^{\frac{n(m+2)}{n-2}}}} \text{ при } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Останні формули вказують, при яких співвідношеннях степенів незалежної змінної рівняння (1) буде квазіоднорідним.

Ввівши заміну

$$y = x^{\frac{m+n}{n-2}} u,$$

де u – нова залежна змінна від $x > 0$, рівняння (5) та (6) стають рівняннями з відокремленими змінними. Розглянемо застосування заміни для непарних n, для парних буде аналогічно, проте з $\pm$ перед інтегралом.

$$xu' = \sqrt[n]{au^2 + b} - \frac{m+n}{n-2}u \;\; | \div x\left(\sqrt[n]{au^2 + b} - \frac{m+n}{n-2}u\right) \neq 0,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[n]{au^2 + b} - \frac{m+n}{n-2}u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \ln C = const, C > 0.$$

Зауважимо, що серед рівнянь $\sqrt[n]{au^2 + b} - \frac{m+n}{n-2}u = 0, x = 0$ можуть бути частинні або особливі розв'язки рівняння (5). Зробивши обернену заміну

$$u = x^{\frac{m+n}{2-n}} y,$$

отримаємо загальний розв'язок рівняння (5).

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y' = 10x^5 y^2 + 10x^{-7} \quad (7)$$

Розв'язання. Перевіримо на квазіоднорідність дане рівняння.

$$m = 5, k = -5 - 2 = -7, \sigma = -5 - 1 = -6.$$

Рівняння є квазіоднорідним із показником однорідності $\sigma = -6$.

Використаємо заміну:

$$y = x^{-6}u,$$

отримаємо:

$$-6x^{-7}u + x^{-6}u' = 10x^{-7}u^2 + 10x^{-7},$$

$$-6u + xu' = 10u^2 + 10,$$

$$xu' = 10u^2 + 6u + 10,$$

$$\int \frac{du}{10u^2 + 6u + 10} = \int \frac{dx}{x} + \ln C,\ \ln C = const, C > 0,$$

$$10u^2 + 6u + 10 \neq 0, x \neq 0.$$

$$\frac{\sqrt{91}}{91} arctg \frac{10\sqrt{91}u + 3\sqrt{91}}{91} = \ln Cx.$$

Перевіримо чи є частинні або особливі розв’язки. Рівняння $10u^2 + 6u + 10 = 0$ дійсних розв’язків немає. $x \neq 0$, бо за умовою $x > 0$.

Повернемося до заміни.

$$\frac{\sqrt{91}}{91} arctg \frac{10\sqrt{91}x^6 y + 3\sqrt{91}}{91} = \ln Cx.$$

Отримали загальний інтеграл рівняння (7).

Список використаних джерел

1. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння. Навч. Посіб. /А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – Київ: Либідь, 2003.- 600с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / Вячеслав Васильевич Степанов. – Москва, 1950. – 473 с.
3. Шкіль М.І. Математичний аналіз / Шкіль М.І. // Київ — 1994-1995. Ч. 2.