Нікорак О. О.
студентка спеціальності «Середня освіта математика»
факультету математики, інформатики та фізики
НПУ імені М.П. Драгоманова

Наукові керівники: доктор фіз.-мат. наук, професор **Працьовитий М.В.**
доктор філософії, викладач **Ратушняк С.П.**

ДРОБИ ДАНЖУА І ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація. У статті розвивається метрична складова зображення чисел дробами Данжуа, зокрема вивчається питання збіжності нескінченого добутку підхідних дробів дробу Данжуа, а також обчислюється міра Лебега множин чисел, що у своєму D_2-зображенні не використовують фіксованого набору цифр.

Ключові слова. D_2-зображення, ланцюгові дроби, підхідні дроби, нескінченний добуток, множини канторівського типу, нуль-мірні множини.

Abstract. In the article we develop the metric component of representation of numbers by Denjoy's fractions. In particular, we study the issue of convergence of the infinite product of convergents of the Denjoy's fraction, and also calculate the Lebesgue measure of sets of numbers that do not use a fixed set of digits in their D_2-representation.

Key words: D_2-representation, continued fractions, convergents, infinite product, sets of Cantor type, zero-dimensional sets.

Вступ

Ланцюгові дроби – загадковий і популярний об'єкт математики не лише за рахунок їх структури та «ланцюгових» закономірностей, а і за їх широку застосовність. Ланцюгові або так звані неперервні дроби посідають почесні перші місця у теоріях наближень функцій тощо. На сьогодні існують багато різних видів ланцюгових дробів, починаючи від елементарних і закінчуючи функціональними. У теорії чисел ланцюгові дроби використовують як форму запису числа.

Ввведені в розгляд і застосовані до задання об'єктів зі складною локальною будовою різні теорії представлення чисел ланцюговими дробами – це зображення елементарними ланцюговими дробами, ланцюговими A_2-дробами, дробами Данжуа. Принципова відмінність дробів Данжуа від перших – є обмеженість алфавіту лише двома цифрами 0 та 1, а від других – існуванням скінченних розкладів чисел. Зображення дробами Данжуа в порівнянні з іншими ланцюговими зображення має свої переваги і недоліки і в кожному з аспекті вони проявляються по своєму.

Ланцюгове D_2-зображення чисел

Нагадаємо [1], що дробом Данжуа називається ланцюговий дріб, елементами якого є числа 0 та 1. Розглядається ланцюгове несамоподібне зображення чисел піввідрізка (0;1] дробами Данжуа, тобто алфавітом для зображення числа є множина $A = \{0; 1\}$ і при цьому числа ототожнюються з елементами простору $L = A \times A \times \dots$ –послідовностей елементів алфавіту. Покладемо $\frac{1}{0} \equiv \infty, \frac{1}{\infty} \equiv 0$.

Теорема 1. [1,6] *Для довільного числа* $x \in (0; 1]$ *існує набір* $(d_1, d_2, d_3, \dots d_n)$, $d_n \in A$, *або послідовність* $(d_n) \in L$ *така, що:*

$$x = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_3 + \cdots}}} \equiv [0; d_1 d_2 d_3 \dots]^{D_2}, \qquad (1)$$

причому $d_1 = 1$ і $d_{i+1} = 1$, *якщо* $d_i = 0$.

Конструктивне доведення існування набору або послідовності (d_n) для довільного числа $x \in (0; 1]$ описує алгоритм розкладу [1] числа у дріб Данжуа. Наведемо даний алгоритм.

Розглядається число $x \in (0; 1]$. Якщо $x = 1$, то таким розкладом, очевидно, є $[0; 1]^{D_2}$. Якщо $x \in (0; 1)$, то $\frac{1}{x} > 1$. Дріб $\frac{1}{x} = 1 + x_1$. Тоді $x = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x_1}, d_1 = 1$. Якщо $x_1 > 1$, то $\frac{1}{\frac{1}{x_1}} < 1$, тоді $x = \frac{1}{1+\frac{1}{0+\frac{1}{x_1}}}$, а $d_1 = 1, d_2 = 0$. Якщо $x_1 \in (0; 1)$, то $\frac{1}{x_1} > 1$. Тоді $\frac{1}{x_1} = 1 + x_2$. Звідки маємо: $x = \frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_2}}$, $d_1 = 1, d_2 = 1$.

У кожному з наступних випадків діємо аналогічно: якщо $x_i > 1$, то наступна цифра $d_i = 0, d_{i+1} = 1$; якщо $x_i < 1$, то наступна цифра $d_i = 1$, $d_{i+1} = 1$.

За нескінченне число кроків отримаємо, що $x_k = 1$ або ж процес буде продовжуватись до нескінченності. Збіжність процесу очевидна.

Розглянемо приклад:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = [0; 1011]^{D_2}.$$

Оскільки для дробів Данжуа виконується рівність

$$[0; d_1 d_2 0 d_3 d_4 \dots]^{D_2} = [0; d_1 d_2 000 d_3 d_4 \dots]^{D_2},$$

то очевидно, що кожне число, для якого хоча б одне $d_n = 0$ має нескінченну кількість зображень. Відсортувавши зображення чисел домовленістю, що $d_{i+1} = 1$ при $d_i = 0$, отримаємо, що майже кожне число матиме єдине зображення за виключенням зліченої множини чисел виду:

$$[0; d_1 d_2 \dots d_n 101]^{D_2} = [0; d_1 d_2 \dots d_n 11]^{D_2}.$$

Множину таких чисел називають множиною D_2-бінарних чисел, решту – D_2-унарних [6].

Таким чином, так введене D_2-зображення є зображенням з нульовою надлишковістю.

Нескінченні добутки підхідних дробів Данжуа

Означення 1. [1,6] *Підхідним дробом* $\frac{p_n}{q_n}$ *порядку* n *дробу Данжуа* $[0; d_1 d_2 \dots]$ *називається значення виразу* $[0; d_1 d_2 \dots d_n] = \frac{p_n}{q_n}$.

Закон утворення підхідних дробів для дробів Данжуа виражається системою рівностей:

$$\begin{cases} p_n = d_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = d_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases} \quad n \geq 1, \tag{2}$$

де $p_0 = 0,\ p_{-1} = 1,\ q_0 = 1,\ q_{-1} = 0$.

Зауважимо, що послідовність знаменників підхідних дробів дробу Данжуа $[0; (1)]$ є класичною послідовністю Фібоначчі.

Ми цікавимося властивостями нескінченних добутків підхідних дробів Данжуа.

Нагадаємо [6], що нескінченним числовим добутком називають вираз

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{3}$$

При цьому вираз $P_k = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k$ називають частинним добутком нескінченного добутку (3).

Кажуть, що нескінченний добуток (3) збігається, якщо збігається послідовність його частинних добутків, тобто існує

$$\lim_{n\to\infty} P_n \neq 0.$$

Отже, нас цікавить вираз виду

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}, \tag{4}$$

де $\frac{p_n}{q_n}$ – підхідні дроби нескінченного дробу Данжуа $[0; d_1 d_2 \dots d_{n+1}]^{D_2}$.

Лема 1. *Послідовність частинних добутків нескінченного добутку (4) дробу Данжуа* $[0; (1)]^{D_2}$ *є послідовністю чисел, обернених до елементів послідовності Фібоначчі.*

Доведення. Оскільки $d_n = 1$, $n \in N$ то згідно з законом утворення підхідних дробів маємо, що $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$ *і* $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, причому $q_1 = 1, q_2 = 2, p_1 = 1, p_2 = 1$. Тоді $p_{n+1} = q_n\ \forall n \in N$. А отже, вираз (4) можна записати у вигляді:

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_{n+1}}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_n+p_{n-1}}.$$

Звідси бачимо, що елементами нескінченного добутку є відношення двох послідовних елементів послідовності Фібоначчі. Частинними добутками такого нескінченного добутку є члени послідовності:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{13};\ \ldots$$

Лему доведено.

Наслідок. Нескінченний добуток P підхідних дробів $\frac{p_n}{q_n}$ дробу Данжуа $[0;(1)]^{D_2}$ є розбіжним до нуля, причому має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{q_i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0,$$

де u_n – члени класичної послідовності Фібоначчі.

Теорема 2. *Нескінченний добуток (4) підхідних дробів довільного дробу Данжуа є розбіжним до нуля.*

Доведення. ***Спосіб 1.*** Розглянемо число $x=[0;d_1,d_2,d_3,\ldots,d_n,\ldots]^{D_2}$. Існує послідовність підхідних дробів до числа x: $\overline{x_0}=\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_n}{q_n},\ldots$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=x$, тобто з деякого номера n: $\left|\frac{p_n}{q_n}-x\right|<\varepsilon$.

Розглянемо послідовність $\overline{x_1}=1,\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_n}{q_n},\ldots.$ Очевидно, що $1,\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_n}{q_n},\ldots\to x\ (n\to\infty)$, оскільки починаючи з деякого номера, наприклад $(n+1)$, модуль різниці члена послідовності і границі послідовності менша ε.

Аналогічно, для послідовностей

$$\overline{x_2}=1,1,\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_n}{q_n},\ldots\to x\ (n\to\infty);$$

$$\overline{x_3}=1,1,1,\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_i}{q_i},\ldots\to x\ (n\to\infty);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{x_k}=\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_i}{q_i},\ldots\to x\ (n\to\infty);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Розглянемо послідовність, що є добутком заданих послідовностей:

$$\frac{p_1}{q_1},\frac{p_1p_2}{q_1q_2},\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3},\ldots,$$

отримаємо послідовність, членами якої є частинні добутки нескінченного добутку (4). Користуючись властивістю границі, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i}{q_i}=\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\overline{x_j}=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{k\to\infty}\overline{x_k}\right]^n=\lim_{n\to\infty}x^n=0,$$

оскільки $x<1$.

Отже, нескінченний добуток (4) розбіжний до нуля. *Теорема доведена*.

Спосіб 2. Розглянемо число $x=[0;d_1,d_2,d_3,\dots,d_n,\dots]^{D_2}$. Існує послідовність підхідних дробів до числа x: $\overline{x_0}=\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\dots,\frac{p_n}{q_n},\dots$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=x$, тобто з деякого номера n: $\left|\frac{p_n}{q_n}-x\right|<\varepsilon$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_n}{q_n}\right)=\infty,$$

оскільки $\frac{p_n}{q_n}\to x\in(0;1)$, коли $n\to\infty$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду, а тому він є розбіжним. А тому згідно з теоремою [6] нескінчений добуток (4) розбігається до нуля. *Теорему доведено*.

Множина канторівського типу, пов'язана з D_2-зображення чисел

Розглядається множина чисел піввідрізка $(0;1]$, які у своєму D_2-зображенні не використовують задану комбінацію цифр – 111.

Теорема 3. *Множина*

$$C=\left\{x\colon x=[0;d_1,d_2,d_3,\dots]^{D_2},\qquad \overline{d_{k+1}d_{k+2}d_{k+3}}\neq\overline{111},k\in Z_0\right\}$$

є ніде не щільною нуль-мірною множиною канторівського типу.

Доведення. Розглянемо множину чисел піввідрізка $(0;1]$ таку, що у своєму D_2-зображенні кожна послідовна трійка чисел не дорівнює 111, тобто множину

$$F\equiv\left\{x\colon x=[0;d_1,d_2,d_3,\dots]^{D_2},\overline{d_{3k+1}d_{3k+2}d_{3k+3}}\neq\overline{111},k\in Z_0\right\}.$$

Оскільки $E_f\subset F$, то для доведення нуль-мірності множини значень досить довести, що $\lambda(F)=0$.

Нехай $F_0\equiv(0;1]$,

$$F_m\equiv\left\{x\colon x=[0;d_1,d_2,\dots]^{D_2},\overline{d_{3k+1}d_{3k+2}d_{3k+3}}\neq\overline{111},k\in\overline{0,1,m}\right\}.$$

Тоді мають місце включення: $F\subset F_{m+1}\subset F_m\subset\dots\subset F_0$, а тому:

$$F=\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m=\lim_{m\to\infty}F_m.$$

Тоді за властивістю монотонності міри Лебега:

$$\lambda(F)\leq\lambda(F_m)\text{ і }\lambda(F)=\lim_{m\to\infty}\lambda(F_m),m\in\mathbb{N}.$$

Оскільки $F_1=(0;1]\setminus\Delta_{111}^{D_2}$, то $\lambda(F_1)=1-|\Delta_{111}^{D_2}|>0$.

Подамо міру Лебега множини F_m у вигляді:

$$\lambda(F_m)=\frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_0)}=\frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_{m-1})}\cdot\frac{\lambda(F_{m-1})}{\lambda(F_{m-2})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)}\cdot\frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)}.$$

Тоді отримаємо:

$$\lambda(F)=\lim_{m\to\infty}\lambda(F_m)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_{m-1})}.$$

Оскільки $F_{m-1}\backslash F_m\equiv\overline{F_m}$, то $F_m=F_{m-1}\backslash\overline{F_m}$. Звідки маємо:

$$\lambda(F)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda\left(F_{m-1}\backslash\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{m-1})-\lambda\left(\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}=$$

$$=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda\left(\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}\right).$$

Оскільки $0<c_1<\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k0}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k}\right|}<c_2<1$ і

$$\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k111}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k}\right|}=\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k111}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k11}\right|}\cdot\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k11}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k1}\right|}\cdot\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k1}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k}\right|},$$

то існує C_1 і C_2 такі, що:

$$0<C_1<\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k111}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_k}\right|}<C_2<1.$$

Тоді

$$0<C_1<\frac{\lambda\left(\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}=\frac{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_{3m-3}a_{3m-2}a_{3m-1}111}\right|}{\left|\Delta^{D_2}_{a_1a_2\ldots a_{3m-3}a_{3m-2}a_{3m-1}}\right|}<C_2<1.$$

Звідки

$$\frac{\lambda\left(\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}\geq 1-C_2>0,$$

а тому

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda\left(\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}=\infty.$$

Згідно з теоремою про властивості нескінченних добутків слідує, що

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda\left(\overline{F_m}\right)}{\lambda(F_{m-1})}\right)\to 0.$$

Отже, $\lambda(F)=0$, а тому $\lambda(C)=0$.

Для доведення ніде не щільності покажемо, що для довільного циліндра піввідрізка $(0;1]$ існує інтервал, що не містить точок множини C. Розглянемо циліндр $\Delta^{D_2}_{c_1c_2\ldots c_m} \in (0;1]$. Тоді існує інтервал $\nabla^{D_2}_{c_1c_2\ldots c_m 111} \subset \Delta^{D_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що не містить точок множини C. *Теорему доведено*.

Список використаних джерел

1. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* On Denjoy's canonical continued fraction expansion // Osaka J. Math. – 40 (2003). – no. 1. – P. 235-244.
2. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
3. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V.,Lysenko I.M. Ratushniak S.P.* Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^*-representation of argument // Matematychni Studii. V.57, No.2. – P. 133-143.
4. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дробы. Аналитическая теория и приложения: Пер. с. англ. – Москва: Мир, 1985. – 416 с.
5. *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове $\grave{A}_2$– зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. – 2009, том 61, № 4. – С.452-463.
6. *Працьовитий М.В*. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2021 (рукопис).
7. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
8. *Працьовитий М.В., Скрипник С.О., Чуйков А.С.* Ланцюгове D_2-зображення дійсних чисел і деякі функції, з ним пов'язані // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 3, - С. 101-114.
9. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. – 208с.
10. *Хинчин А.Я*. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 116 с.