Продан І.І.
студентка спеціальності «Середня освіта математика»
факультету математики, інформатики та фізики
НПУ імені М.П. Драгоманова

Наукові керівники*:* доктор фіз.-мат. наук, професор **Працьовитий М.В.**
доктор філософії, викладач **Ратушняк С.П.**

ОДНА КВАЗІПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ОЗНАЧЕННА В ТЕРМІНАХ Q_2-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА

Анотація. У статті розглядається один континуальний клас функцій, що є узагальненням показникових функцій. Досліджують фрактальні властивості графіка функції, доводиться неперервність та монотонність функції.

Ключові слова. Q_2-зображення, фрактальна функція, показникова функція, автомодельний графік функції.

Abstract. We consider one continuous class of functions, which is a generalization of exponential functions. The fractal properties of the graph of the function are studied in the article. We prove the continuity and monotonicity of the function of this class.

Key words: Q_2-representation, fractal function, exponential function, scale-invariant graph of function.

Вступ

Нехай задано $A = \{0,1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, q_0 — додатне число з (0;1), $q_1 \equiv 1 - q_0$. Тоді [1] для довільного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\ldots}, \qquad (1)$$

де $\beta_{\alpha_i} = \alpha_i q_{1-\alpha_i}$, тобто $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$. Розклад числа x в ряд називається Q_2-*представленням*, а запис $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\ldots}$ – Q_2-*зображенням* числа x. Число $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається -ою цифрою цього зображення.

Існують числа, що мають два Q_2-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 0(1)} = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 1(0)}. \qquad (2)$$

Їх ми називаємо Q_2-*бінарні*. Решта чисел одиничного відрізка мають єдине Q_2-зображення і називаються Q_2-*унарні*.

Два числа $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 0\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$ і $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 1\alpha'_{m+1}\alpha'_{m+2}\ldots}$ перебувають у відношенні $x_1 \le x_2$, причому

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \alpha_{m+1} = 1 = 1 - \alpha_{m+1}', \forall m \in N. \qquad (3)$$

Зауважимо, що коли $q_0 = \frac{1}{2}$ $(q_1 = \frac{1}{2})$, то ряд (1) набуває вигляду:

$$\beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right) = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha_k}{2}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\right) = \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{2^k} + \cdots.$$

Тобто при $q_0 = \frac{1}{2}$ Q_2-зображення є класичним двійковим зображенням чисел, а тому воно є його узагальненням.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2 \ldots c_m$ називається множина чисел відрізка $[0; 1]$, які в своєму Q_2-зображенні мають перші цифри відповідно рівні $c_1, c_2, \ldots, c_m$, тобто множина

$$\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x \in [0; 1]: x = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_1\alpha_2\ldots}, \alpha_i \in A\}. \qquad (4)$$

Властивості циліндрів Q_2-зображення розкривають геометрію цього зображення. А саме:

1) *циліндр* $\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є відрізком* $[a; b]$ *з кінцями:*

$$\begin{cases} a = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \beta_{c_1} + \sum\limits_{i=2}^{m}(\beta_{c_i}\prod\limits_{j=1}^{i-1} q_{c_j}), \\ b = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m(1)} = \beta_{c_1} + \sum\limits_{i=2}^{m}(\beta_{c_i}\prod\limits_{j=1}^{i-1} q_{c_j}) + \prod\limits_{k=1}^{m} q_{c_k}; \end{cases}$$

2) *довжина циліндра обчислюється за формулою*:

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \prod_{k=1}^{m} q_{c_k} = q_0^{m-c_1+c_2+..+c_m} q_1^{c_1+c_2+..+c_m}; \qquad (5)$$

3) *основне метричне відношення має вигляд*:

$$\frac{|\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = q_i; \qquad (6)$$

Остання властивість вказує на те, що відношення довжини циліндрів наступного і попереднього рангів залежить лише від останньої цифри, що вказує на самоподібність зображення.

Q_2-зображення чисел за рахунок своєї геометрії і самоподібності є ефективним інструментом «фракталізації» об'єктів, означених в термінах даного зображення, зокрема задання та дослідження функцій зі складною локальною будовою. Так, наприклад, у роботі [4] вивчалася функція $f\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ – інверсор цифр, яка при $q_0 = \frac{1}{2}$ є лінійною, а при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ – сингулярною, тобто неперервною функцією, відмінною від константи, похідна якої майже скрізь у розумінні міри Лебега рівна нулю. В роботі [3] в термінах Q_2-зображення розглядається функція, яка є неперервною і ніде не диференційовною при певних значеннях q_0.

Основний об'єкт

Розглядається функція, означена рівністю

$$f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots}\right) = a^{\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots}}, a > 0, a \neq 1. \quad (7)$$

Зауважимо, що оскільки число $1 \neq a \in R_+$ і параметр, що визначає Q_2-зображення, $q_0 \in (0; 1)$ набувають континуальної множини значень, тому ми говоримо про цілий континуальний клас функцій. Якщо $q_0 = \frac{1}{2}$, то функція f є класичною показниковою $f(x) = a^x$, а тому f є узагальненням показникових. З цієї причини клас функцій f називатимемо *квазіпоказниковими*.

Функція f є коректно означеною, тобто для двох різних Q_2-зображень аргумента значення функції співпадають:

$$f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k 0(1)}\right) = f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k 1(0)}\right) \quad (8)$$

Справді, знайшовши значення для кожного із зображень:

$$f\left(\Delta^2_{\alpha_1\ldots\alpha_k 0(1)}\right) = a^{\beta_{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{k} \beta_{\alpha_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j} + (\beta_1 q_0 + \beta_1 q_0 q_1 + \beta_1 q_0 q_1^2 + \cdots) \prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j}}$$

$$f\left(\Delta^2_{\alpha_1\ldots\alpha_k 1(0)}\right) = a^{\beta_{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{k} \beta_{\alpha_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j} + \beta_1 \prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j}},$$

оскільки, $\beta_1 q_0 + \beta_1 q_0 q_1 + \beta_1 q_0 q_1^2 + \cdots = \beta_1 q_0 \cdot \frac{1}{1-q_1} = \beta_1$, то має місце рівність (8).

Лема 1. *Для функції f справедливі наступні функціональні співвідношення:*

$$\frac{f\left(\Delta^2_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\right)}{f\left(\Delta^2_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\right)} = a^{(q_i - q_j)\Delta^{Q_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots} + \beta_i - \beta_j}; \quad (9)$$

$$\frac{f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k 0(1)}\right)}{f\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k 1(0)}\right)} = 1. \quad (10)$$

Доведення. Покажемо справедливість рівності (9) для цього перетворимо праву частину рівності:

$$\frac{f\left(\Delta^2_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\right)}{f\left(\Delta^2_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\right)} = \frac{a^{\Delta^{Q_2}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}}}{a^{\Delta^{Q_2}_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}}} = a^{\Delta^{Q_2}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} - \Delta^{Q_2}_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}} =$$

$$= a^{q_i \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} - q_j \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} + \beta_i - \beta_j} =$$

$$= a^{q_i \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} - q_j \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} + \beta_i - \beta_j} =$$

$$= a^{(q_i - q_j)\Delta^{Q_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots} + \beta_i - \beta_j},„$$

що треба було довести. Рівність (10) слідує з коректності означення функції. Лему доведено.

Теорема 1. *Функція f, означенна рівністю (7), є строго монотонною і неперервною, причому строго зростаючою, коли* $a > 1$, *і спадною, коли* $0 < a < 1$.

Доведення. Функція є неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Розглянемо два випадки

1) x_0 – Q_2-бінарна точка,

2). x_0 – Q_2-унарна точка.

Неперервність у Q_2-бінарній точці випливає з того, що функція коректно означена. Дослідимо випадок 2).

Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}$ довільна фіксована точка. Розглянемо точку $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m \ldots} \neq x_0$. Тоді існує номер $m \in \mathrm{N}$ такий, що $c_m \neq \alpha_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$. Розглянем різницю:

$$\begin{aligned} f(x)\text{-}f(x_0) &= a^{\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} \alpha_m \alpha_{m+1} \ldots}} - a^{\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c_m c_{m+1} \ldots}} = \\ &= a^{\beta_{c_1} + \beta_{c_2} q_{c_1} + \cdots + \beta_{c_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i} + \beta_{\alpha_m} \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i} q_{\alpha_m} + \cdots} - \\ &- a^{\beta_{c_1} + \beta_{c_2} q_{c_1} + \cdots + \beta_{c_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i} + \cdots} = \\ &= a^B \left(a^{\beta_{\alpha_m} \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i} q_{\alpha_m} + \cdots} - a^{\beta_{c_m} \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i} + \cdots} \right) \to a^B \cdot 0, \\ &\qquad (m \to \infty), \end{aligned}$$

де $B = \beta_{c_1} + \beta_{c_2} q_{c_1} + \cdots + \beta_{c_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} q_{c_i}$.

Отже, функція f є неперервною в Q_2-унарній точці, а тому функція f є неперервною на відрізку [0; 1].

Доведемо монотонність функції. Розглянемо дві точки:

$$x_1 = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m 0 \alpha_{m+2} \alpha_{m+3} \ldots} \text{ і } x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m 1 \alpha'_{m+2} \alpha'_{m+3} \ldots},$$

такі що $x_1 < x_2$. Поділимо $f(x_1)$ на $f(x_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1)}{f(x_2)} &= \frac{a^{\prod_{i=1}^{m} q_0 q_{\alpha_i} (\beta_{\alpha_{m+2}} + \beta_{\alpha_{m+3}} q_{\alpha_{m+2}} \ldots)}}{a^{\prod_{i=1}^{m} q_0 q_{\alpha_i} + \prod_{i=1}^{m} q_1 q_{\alpha_i} (\beta_{\alpha'_{m+2}} + \beta_{\alpha'_{m+3}} q_{\alpha'_{m+2}} \ldots)}} = \\ &= a^{\prod_{i=1}^{m} q_{\alpha_i} (q_0 (\beta_{\alpha_{m+2}} + \beta_{\alpha_{m+3}} q_{\alpha_{m+2}} \ldots - 1) - q_1 (\beta_{\alpha'_{m+2}} + \beta_{\alpha'_{m+3}} q_{\alpha'_{m+2}} \ldots))} \\ &= a^{B(q_0 C - q_1 D)}, \end{aligned}$$

де $B \equiv \prod_{i=1}^{m} q_{\alpha_i} > 0,$

$C \equiv \beta_{\alpha_{m+2}} + \beta_{\alpha_{m+3}} q_{\alpha_{m+2}} + \cdots - 1,\ D \equiv (\beta_{\alpha'_{m+2}} + \beta_{\alpha'_{m+3}} q_{\alpha'_{m+2}} \dots).$

Нехай $0 < a < 1$. Якщо $\alpha_{m+2} = \alpha_{m+3} = \cdots = 1$, то $C = 0,\ D \neq 0$. Тоді

$$a^{B(-q_1 D)} > 1;$$

якщо $\alpha'_{m+2} = 0$, то $\alpha_{m+2} \neq 1$:

$$a^{B(q_0(-C))} > 1.$$

А тому $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} > 1$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$, а функція f спадна. Аналогічно у випадку, коли $a > 1$ отримуємо, що функція f зростаюча. *Теорему доведено*.

Теорема 2. *Графік* $\Gamma_f = \{M(x; y): x \in [0; 1], y = f'(x)\}$ *функції* f *є автомодельною множиною, причому* $\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, *де*

$$\delta_0(\Gamma_f) = \Gamma_0, \delta_1(\Gamma_f) = \Gamma_1 \text{ і}$$

$$\delta_0: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x; \\ y' = y^{q_0}, \end{cases} \qquad \delta_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; \\ y' = a^{q_0} y^{q_1}. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $G = \delta_0(\Gamma_f) \cup \delta_1(\Gamma_f)$. Доведемо, що $\Gamma_f = G$. Спочатку покажемо, що $G \subseteq \Gamma_f$. Розглянемо довільну точку $M \in G$. Тоді, якщо $M \in \delta_0(\Gamma_f)$, то координати точки $M(x'; y')$ визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x; \\ y' = y^{q_0}, \end{cases}$$

де $(x; y) \in \Gamma_f$. Оскільки координати точки M задовольняють вираз функції f, тобто

$$f(x') = f\left(\frac{1}{2}x\right) = f\left(\Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\dots}\right) = a^{\Delta^{Q_2}_{0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}} = a^{q_0 \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}} = y^{q_0},$$

тому точка $M(x'; y') \subset \Gamma_f$.

Якщо $M \in \delta_1(\Gamma_f)$, то координати точки $M(x'; y')$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; \\ y' = a^{q_0} y^{q_1}, \end{cases}$$

де $(x; y) \in \Gamma_f$. Аналогічно бачимо, що координати точки M задовольняють вираз функції f, оскільки $f(x') = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = f\left(\Delta^2_{1\alpha_1\alpha_2\dots}\right) = a^{\Delta^{Q_2}_{1\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}} = a^{q_0 + q_1 \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}} = a^{q_0} y^{q_1}$.

Оскільки вибір точки M здійснювався довільно, то покажемо, що $\Gamma_f \subseteq G$. Виберемо довільну точку $M(x; f(x)) \in \Gamma_f$. Тоді нехай у зображенні числа x

перша цифра дорівнює 0, тобто $x = \Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots}$, звідки $f(x) = \Delta^{Q_2}_{0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}$. Оскільки координати точки M можна записати як

$$\begin{cases} x = {}^1\!/_2\, \Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots}; \\ y' = q_0 \Delta^{Q_2}_{0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}, \end{cases}$$

то точка $M(x; f(x))$ може бути отримана з формул $\delta_0\left(M\left(\Delta^2_{0\alpha_1\alpha_2\ldots}; \Delta^{Q_2}_{0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}\right)\right)$, а тому $M \in \Gamma_f$.

Аналогічно, якщо перша цифра у зображення x дорівнює 1, отримуємо, що $\Gamma_f \subseteq G$. Оскільки включення $G \subseteq \Gamma_f$ і $\Gamma_f \subseteq G$ виконуються одночасно, то $\Gamma_f = G$. Множина G є автомодельною за побудовою, а тому такою є і Γ_f . Теорему доведено.

Список виокристаних джерел

1. *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимпт. методы в исслед. стохастических моделей. — К.: ИМ АН УССР, 1987. — С. 92–102.
2. *Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Дмитренко С.О., Лисенко І.М., Ратушняк С.П.* Про один клас функцій з фрактальними властивостями // Буковинський математичний журнал, 2021 , Т.6 № 1, - С. 278-283.
3. *Працьовитий М.*В., *Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2-зображення // Нелінійні коливання, Т.23. №2, 2020. – С.231-252.
4. *Працьовитий М.В., Скрипник С.В.* Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 134-143.