Франчук К.В.
магістратнка спеціальності 111 Математика (фінансова математика)
факультету математики, інформатики та фізики
НПУ імені М.П.Драгоманова
Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор **Працьовитий М.В.**

ПРО $\tilde{Q}$ - ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ДЕЯКІ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація. У роботі розглядаються приклади множин канторівського типу, неперервних функцій та перетворень одиничного відрізка, які ілюструють розширені можливості $\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел для задання та вивчення різних класів математичних об’єктів по відношенню до канторівських систем числення, які є частковим випадком $\tilde{Q}$-зображення.

Ключові слова: канторівська система числення, $\tilde{Q}$-зображення, циліндр, основне метричне відношення, множина канторівського типу, інверсор, міра Лебега.

Abstract. In this paper we consider examples sets of Cantor type, continuous functions and unit segment transformations, which illustrate the advanced possibilities for $\tilde{Q}$-representation of real problem numbers and study of different classes of mathematical objects in relation to Cantor number systems, which are a partial case of $\tilde{Q}$-representation.

Keywords: Cantor’s number system, $\tilde{Q}$-representation, cylinder, basic metric ratio, set of Cantor type, inverter, Lebesgue measure.

Сьогодні в математиці використовується багато різних систем числення. Одні з них мають основу, інші – декілька основ. Разом з цим існують системи, які використовують нескінченну кількість основ і змінний алфавіт. До таких систем числення відносять канторівські системи, введені в розгляд в 1869 році видатним німецьким вченим Г. Кантором [1].

Узагальненням канторівських систем зображення чисел є $\tilde{Q}$-зображення, введене у 1998 році М.В. Працьовитим [9]. Як засвідчує автор, на той час йому про канторівські системи числення відомо не було. А з’явилось воно як узагальнення введеного раніше Q-зображення та Q*-зображення чисел [6]. Всі ці зображення знайшли широке застосування у фрактальному аналізі множин, функцій, розподілів ймовірностей, динамічних систем, перетворень простору тощо.

У даній роботі ми аналізуємо як розширює можливості задання та дослідження математичних об'єктів перехід від канторівських систем числення до їх узагальнення – $\tilde{Q}$-зображення.

1. Канторівські системи числення

Узагальненням класичною s-кової системи числення, в якій використовується натуральна основа $s > 1$ і алфавіт $A = \{0,1, \dots, s-1\}$, є канторівські системи числення [1, 2, 11].

Нехай $(\mathrm{s_n})$ – фіксована послідовність натуральних чисел, більших за 1. $A_{s_n} = \{0, 1, \dots, s_n - 1\}$ – послідовність алфавітів і $L = A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_n} \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавітів.

Теорема 1 (Cantor G.). Для будь-якого числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_1 s_2} + \frac{a_3}{s_1 s_2 s_3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_1 s_2 \dots s_n} = \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}. \qquad (1)$$

Розклад числа x у ряд (1) називається його представленням у канторіській системі числення з послідовністю основ $(\mathrm{s_n})$ (далі $(\mathrm{s_n})$-представленням). Формальний запис числа x у вигляді $\Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ називають його $(\mathrm{s_n})$-зображенням [3], при цьому число $a_n = a_n(x) \in A_{s_n}$ називається n-тою цифрою цього зображення.

Очевидно, що $0 = \Delta^{(\mathrm{s_n})}_{00\dots 0 \dots}, 1 = \Delta^{(\mathrm{s_n})}_{(s_1 - 1)(\mathrm{s_2} - 1)\dots(\mathrm{s_n} - 1)\dots}$.

При $s_n = s$ отримуємо представлення (відповідно зображення) числа в s-ковій системі числення.

Якщо множина $\Delta^{(s_n)}_{\mathrm{c_1 c_2 \dots c}_m}$ містить лише ті числа $x \in [0; 1]$, у яких перші m цифр рівні $c_1 c_2 \dots c_m$, то її називають циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$. Циліндром є відрізок з кінцями $\Delta^{(s_n)}_{\mathrm{c_1 c_2 \dots c}_m(0)}$ і $\Delta^{(s_n)}_{\mathrm{c_1 c_2 \dots c}_m [s_{m+1} - 1][s_{m+2} - 1]\dots[s_{m+n} - 1]\dots}$. Довжина цього відрізка дорівнює $\left|\Delta^{(s_n)}_{\mathrm{c_1 c_2 \dots c}_m}\right| = \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m}$ (залежить від рангу і від набору основ $s_1 \dots s_m$). Основне метричне відношення: $\left|\Delta^{(s_n)}_{\mathrm{c_1 c_2 \dots c}_m i}\right| = \frac{\left|\Delta^{(s_n)}_{\mathrm{c_1 c_2 \dots c}_m}\right|}{s_{m+1}}$[3].

Властивості циліндрів (циліндричних множин) розкривають геометричний властивості $(\mathrm{s_n})$- зображення (геометричний зміст цифр, метричні відношення тощо).

2. $\tilde{Q}$ – зображення чисел відрізка [0;1]

Нехай $\tilde{Q} = \|q_{ij}\|$ – «матриця», $i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in \mathbb{Z}_0 \cup \{\infty\}$, $j \in \mathbb{N}$, яка має властивості:

1) $0 < q_{ij} \in \mathbb{R}$;
2) $\sum_i q_{ij} = 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$;
3) $\prod_{n=1}^{\infty} q_{i_n n} = 0 \ \ (i_n) \in L \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{\infty} \max_i \{q_{ij}\} = 0$.

Використовуватимемо позначення та термінологію з першоджерел [4-8]:

1. Якщо $m_j = n = const\ \forall j \in \mathbb{N}$, де натуральне число $n > 1$, то «матрицю» позначають через Q^*; а при $q_{ij} = q_i\ \forall j \in \mathbb{N}$ позначають через Q.

2. Якщо $m_j = \infty\ \forall j \in \mathbb{N}$, то позначатимемо через Q_∞^*; і при цьому через Q_∞, якщо $q_{ij} = q_i\ \forall j \in \mathbb{N}$ [9].

Для будь-якого $x \in [0,1)$ існує послідовність $\{i_k\}$, $i_k \in \mathbb{N}^0_{m_k}$, така, що

$$x = a_{i_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{i_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x)j}\right], \tag{2}$$

де $a_{i_k(x)} = \sum_{s=0}^{i_k} q_{sk}$.

Подання числа x у вигляді (2) називають $\tilde{Q}$-представленням числа x, а $x = \Delta_{i_1(x)\dots i_k(x)\dots}$- його $\tilde{Q}$-зображенням, число $i_j(x)$ – j-тою $\tilde{Q}$-цифрою [9].

Очевидно, що при $q_{in} = \frac{1}{s_n}, i \in \{0,\dots,s_j-1\}$ $\tilde{Q}$-зображення є (s_n)-зображенням.

Зауважимо, що $0 = \Delta_{(0)}, 1 = \Delta_{[s_1-1][s_2-1]\dots}$.

Циліндром рангу k з основою $i_1 i_2 \dots i_k$ називають множину від $\Delta_{i_1\dots i_k}$, яка містить лише такі $x \in [0;1]$, у яких перші k $\tilde{Q}$-цифр рівні $i_1, i_2, \dots i_k$ відповідно.

Безпосередньо з означення випливають рівності:

1) $\Delta_{i_1\dots i_k} = \Delta_{i_1\dots i_k 0} \cup \Delta_{i_1\dots i_k 1} \cup \dots \cup \Delta_{i_1\dots i_k (s_{k+1}-1)}$;

2) $[0;1] = \bigcup_{i_1=0}^{s_1-1} \dots \bigcup_{i_k=0}^{s_k-1} \Delta_{i_1\dots i_k}$.

Циліндр є відрізком з кінцями $\Delta_{i_1\dots i_k(0)}$ та $\Delta_{i_1\dots i_k(s_{k+p}-1)}$ і має довжину $\left|\Delta_{i_1\dots i_k}\right| = \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j} \longrightarrow 0 (k \longrightarrow \infty)$.

Основне метричне відношення $\left|\Delta_{i_1\dots i_k i}\right| = q_{s(k+1)}\left|\Delta_{i_1\dots i_k}\right|$, причому $\Delta_{i_1\dots i_k i} \subset \Delta_{i_1\dots i_k}\ \forall x \in \mathbb{N}^0_{m_{k+1}}$ [9].

Деякі точки мають два $\tilde{Q}$-зображення $\Delta_{i_1\dots i_k 00\dots}$ та $\Delta_{i_1\dots[i_k-1][s_{k+1}-1][s_{k+2}-1][s_{k+3}-1]\dots}$. Їх будемо називати $\tilde{Q}$-бінарними. Інші числа мають єдине $\tilde{Q}$-зображення, їх називатимемо $\tilde{Q}$-унарними.

Лема 1 (про два зображення)[10]. Для будь-якого набору цифр $c_1, c_2, \dots, c_k$ $\tilde{Q}$-бінарних чисел справедлива рівність

$$x = \Delta_{i_1\dots i_k(0)} = \Delta_{i_1\dots[i_k-1](s_{k+p}-1)},$$

де k – фіксоване, $p \in \mathbb{N}$.

Лема 2. Нехай $c > d$. Числа

$$u = \Delta_{i_1 i_2\dots i_{k-1} c c_1 c_2\dots} \text{ і } v = \Delta_{i_1 i_2\dots i_{k-1} d d_1 d_2\dots}$$

перебувають у відношенні $u \geq v$, причому $u = v$ лише тоді, коли

$$c = d + 1 \text{ і } c_n = 0 = s_n - 1 - d_n\ \forall n > k.$$

Зауваження 1. Для спрощення записів введемо позначення $m_n = s_n - 1$.

3. Множини канторівського типу

Важливою для теорії нескінченних множин (теорії потужностей множин), теорії функцій, фрактальної геометрії та фрактального аналізу є класична множина Кантора, яка є множиною всіх чисел, які у трійковій системі числення записуються з використанням двох чисел 0 та 2. Вона є досконалою, ніде не щільною множиною, нульової міри Лебега .

Під множинами канторівського типу ми розуміємо досконалі, ніде не щільні множини простору R^1(нульової або додатної міри Лебега).

Нехай $V_n \subset A_{s_n}, V_n = \{0, s_n - 1\}$, $\mathrm{C}_1 = C[(s_n); V_n] = \{x: \alpha_n(x) \in V_n\}$. Міра Лебега $\lambda(\mathrm{C}_1) = 0$.

Тепер розглянемо множину $C_2 = C\left[\tilde{Q}; V_n\right] = \{x: \alpha_n(x) \in V_n\}$. Вона є досконалою, ніде не щільною множиною, міра Лебега якої може бути як додатньою, так і нульовою.

Теорема 2. Міра Лебега множини $C\left[\tilde{Q}; V_n\right]$обчислюється за формулою

$$\lambda\left(C\left[\tilde{Q}; V_n\right]\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{E_k})}{\lambda(E_{k-1})}\right).$$

Доведення. □Розглянемо множину канторівського типу чисел відрізка $[0; 1]$, заданих у канторівських системах числення з послідовністю основ (s_n), де $s_n \geq 3$.

Нехай $E_0 = [0; 1], E_n$ – множина циліндрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C_2, тобто $E_n = \bigcup_{i_1 \in V_n} \dots \bigcup_{i_n \in V_n} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

$$C_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n \to \infty}(E_n).$$

Покладемо, що $\bar{E}_{n+1} \equiv E_n \backslash E_{n+1}$, $E_{n+1} \subset E_n, n \in \mathbb{N}$, тоді

$$\lambda(C_2) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(E_{n-1})}{\lambda(E_{n-2})} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda(E_2)}{\lambda(E_1)} \cdot \frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_0)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_{k-1}) - \lambda(\overline{E_k})}{\lambda(E_{k-1})}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{E_k})}{\lambda(E_{k-1})}\right). \blacksquare$$

Наслідок.

$$\lambda\left(C\left[\tilde{Q}; V_n\right]\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k \in \overline{V}_k} q_{i_k k} = \infty.$$

Як бачимо, $\tilde{Q}$-зображення є тоншим знаряддям аналізу міри множин.

4. Функції зі складною локальною структурою

Розглянемо функцію f, означену рівністю

$$I\left(x = \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{(s_n)}_{[m_1 - a_1][m_2 - a_2]\ldots[m_n - a_n]\ldots} \qquad (3)$$

яку ми називаємо інверсором. З'ясуємо чи є означення функції коректним.

Спочатку перетворимо формулу (3).

$$I(x) = \Delta^{(s_n)}_{[m_1 - a_1][m_2 - a_2]\ldots[m_n - a_n]\ldots}$$
$$= \frac{s_1 - 1 - a_1}{s_1} + \frac{s_2 - 1 - a_2}{s_1 s_2} + \cdots + \frac{s_n - 1 - a_n}{s_1 s_2 \ldots s_n} + \cdots$$
$$= \frac{s_1 - 1}{s_1} + \frac{s_2 - 1}{s_1 s_2} + \cdots + \frac{s_n - 1}{s_1 s_2 \ldots s_n} + \cdots$$
$$- \left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_1 s_2} + \cdots + \frac{a_n}{s_1 s_2 \ldots s_n} + \cdots\right) = 1 - x.$$

Зрозуміло, що для будь-якого значення x існує єдине значення $I(x)$.

$\forall x = \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k (0)} = \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} [a_k - 1](m_{k+p})}$ виконується $I\left(\Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k (0)}\right) = I\left(\Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} [a_k - 1](m_{k+p})}\right)$, бо $1 - \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} [a_k - 1](m_{k+p})} = 1 - \Delta^{(s_n)}_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} [a_k - 1](m_{k+p})}$.

Отже, означення функції (3) є коректним.

Функція (3) - неперервна, диференційована та монотонно спадає на всій області визначення.

Розглянемо тепер інверсор для $\tilde{Q}$ – зображення.

$$I\left(x = \Delta_{i_1 \ldots i_n \ldots}\right) = \Delta_{[m_1 - i_1][m_2 - i_2]\ldots[m_n - i_n]\ldots} \qquad (4)$$

Перевіримо коректність означення функції.

Оскільки для $\tilde{Q}$-унарних x існує єдиний набір $(i_k), k = 1,2,3 \ldots$, то для нього існує єдиний набір $(m_n - i_n)$, який визначає значення $I(x)$.

Розглянемо x – $\tilde{Q}$-бінарне число.

$$x = \Delta_{i_1 \ldots i_k (0)} = \Delta_{i_1 \ldots [i_k - 1](m_{k+p})}.$$

$$I\left(\Delta_{i_1 \ldots i_k (0)}\right) - I\left(\Delta_{i_1 \ldots [i_k - 1](m_{k+p})}\right)$$
$$= \Delta_{[m_1 - i_1][m_2 - i_2]\ldots[m_{k-1} - i_{k-1}][m_k - i_k] m_{k+1} m_{k+2} \ldots}$$
$$- \Delta_{[m_1 - i_1][m_2 - i_2]\ldots[m_{k-1} - i_{k-1}][m_k - i_k + 1][m_{k+1} - m_{k+1}][m_{k+2} - m_{k+2}]\ldots}$$
$$= \Delta_{[m_1 - i_1][m_2 - i_2]\ldots[m_{k-1} - i_{k-1}][m_k - i_k](m_{k+p})} - \Delta_{[m_1 - i_1][m_2 - i_2]\ldots[m_{k-1} - i_{k-1}][m_k - i_k + 1](0)} = 0,$$

за лемою 1.

Означення функції (4) є коректним.

Неперервність. Нехай $x_0 = \Delta_{i_1} \ldots i_k \ldots -$ $\tilde{Q}$-унарна точка.

$$x_0 \neq x = \Delta_{i_1} \dots i_k b_1 b_2 \dots$$

$$|x - x_0| = \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j} \; |a_{b_1} + a_{b_2} q_{b_1,k+1} + \dots - a_{i_{k+1}} - a_{i_{k+2}} q_{i_{k+1},k+1} - \dots| \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j} \; \to 0 \; (k \to \infty)$$

$$|I(x) - I(x_0)|$$

$$= \prod_{j=1}^{k} q_{m_j - i_j, j} \, |a_{m_{k+1} - b_1} + a_{m_{k+2} - b_2} q_{m_{k+1} - b_1, k+1} + \dots - a_{m_{k+1} - i_{k+1}}$$

$$- a_{m_{k+2} - i_{k+2}} q_{m_{k+1} - i_{k+1}, k+1} - \dots | \leq \prod_{j=1}^{k} q_{m_j - i_j, j} \to 0 \; (k \to \infty)$$

Отже, $\lim_{x \to x_0} |I(x) - I(x_0)| = 0$.

Нехай $x_0 = \Delta_{i_1} \dots i_k(0) = \Delta_{i_1} \dots [i_k - 1](m_{k+p}) -$ $\tilde{Q}$-бінарна точка.

$$x_0 \neq x = \Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots}$$

$$x \geq x_0, |x - x_0| = \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j} \; |a_{i_{k+1}} + a_{i_{k+2}} q_{i_{k+1},k+1} + \dots - a_0 - a_0 q_{0,k+1} - \dots|$$

$$\leq \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j} \; \to 0 \; (k \to \infty) \Longrightarrow x \longrightarrow x_0(+0).$$

$$|I(x) - I(x_0)|$$

$$= \prod_{j=1}^{k} q_{m_j - i_j, j} \, |a_{m_{k+1} - i_{k+1}} + a_{m_{k+2} - i_{k+2}} q_{m_{k+1} - i_{k+1}, k+1} + \dots - a_{m_{k+1}}$$

$$- a_{m_{k+2}} q_{m_{k+1}, k+1} - \dots | \leq \prod_{j=1}^{k} q_{m_j - i_j, j} \to 0 \; (k \to \infty)$$

Отже, $\lim_{x \to x_0(+0)} |I(x) - I(x_0)| = 0$.

Аналогічно, при $x \longrightarrow x_0 = \Delta_{i_1 \dots i_{k-1} [i_k - 1](m_{k+p})}$ $(k \longrightarrow \infty)$, тобто $\lim_{x \to x_0 - 0} |I(x) - I(x_0)| = 0$.

Отже, функція неперервна.

Монотонність. Розглянемо точки $x_1 = \Delta_{i_1 \dots i_{k-1} c c_{k+1} c_{k+2} \dots}$ і $x_2 = \Delta_{i_1 \dots i_{k-1} b b_{k+1} b_{k+2} \dots}$.

Нехай $c > b, c \neq b + 1$, тоді, за лемою 2, $x_1 > x_2$.

$$I(x_1) - I(x_2) = \Delta_{[m_1-i_1][m_2-i_2]\dots[m_{k-1}-i_{k-1}][m_k-c][m_{k+1}-c_{k+1}][m_{k+2}-c_{k+2}]\dots} - \Delta_{[m_1-i_1][m_2-i_2]\dots[m_{k-1}-i_{k-1}][m_k-b][m_{k+1}-b_{k+1}][m_{k+2}-b_{k+2}]\dots} = |c > b \Rightarrow m_k - c < m_k - b| < 0.$$

Функція спадає на всій області визначення.

Для вивчення диференіальних властивостей функції $I(x)$ можна скористатись наступним твердженням.

Лема 3. Якщо в $\tilde{Q}$-унарній точці $x_0 = \Delta_{i_1\dots i_n\dots}$ існує похідна $\mathrm{I}'(\mathrm{x}_0)$ функції $I(x)$, то вона може бути знайдена за формулою

$$I'(x_0) = -\prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{m_n-i_n,n}}{q_{i_n,n}}.$$

Доведення. Функція $y = I(x)$ – монотонна, тому за теоремою Лебега на $[0;1]$ майже скрізь має скінченну похідну (у розумінні міри Лебега). Скористаємося циліндричною похідною [10, ст. 94]:

$$I'(x_0) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\left|I\left(\Delta_{i_1\dots i_n}\right)\right|}{\left|\Delta_{i_1\dots i_n}\right|} = -\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{q_{m_k-i_k,k}}{q_{i_k}} = -\prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{m_n-i_n,n}}{q_{i_n,n}}.$$

Список використаної літератури

1. Cantor G. Uber die einfachen Zahlensysteme // Z.Math.Phys. – 1869. – Bd.14. – S.121-128.

2. Працьовитий М.В. Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2009. — № 8. — С. 6-18.

3. Працьовитий М. В. Числові системи і системи числення: канторівські // Проблеми інформатизації навчального процесу в школі та вищому педагогічному навчальному закладі: Матеріали Всеукр. наук. конференції, 10.10.2017 р. – Київ: НПУ іме. М.П. Драгоманова, 2017. – С. 129–130.

4. Працевитый Н. В. Сингулярные распределения канторовского и салемовского типов. – Киев, 1988. – 60 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики).

5. Працевитый Н. В. Один класс случайных величин с сингулярным распределеннем// Аналитические методы исследовання эволюций стохастических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 78-90.

6. Працевитый Н. В. Распределения случайных величин с независимыми Q-символами// Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 92-101.

7. Працьовитий М. В., Лещинський О. Л. Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теор. ймов. та матем. стат. – 1997. – № 57. – С. 134-139.

8. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев : Наук. думка, 1992. – 208 с.

9. Працьовитий М. В. Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання: зб. наук. пр. / Ін-т математики НАН України, НПУ ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 1998. – № 2. – С. 14-35.

10. М. В. Працьовитий. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2021. – 316 с.

11. Ралко Ю. В. Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2009, № 10.— С. 132 —140.

12. Бондаренко О. І., Василенко Н. М., Працьовитий М. В. Канторівська двійково-фібоначчієвасистема числення у задачах теоріїфункцій// Збірник праць Ін-ту математики НАН України. —2019, т. 16, № 3. — С. 173–185.

13. Працьовитий М.В., Скрипник С.В. Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 134-143.

14. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliash N.V., Ratushniak S. P. Inversor of digits of -representation of numbers // Matematychni Studii. V.55, No.1(2021). pp.37-43.