Коваленко К. М.
студентка спеціальності «Середня освіта (математика)»
факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова
Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук **Ковальов І.М.**

ПРОСТОРИ ХАРДІ

Анотація. Теорія просторів Харді H^p є актуальною. Вона є основною темою сучасної математики. Було досліджено простори Харді та внутрішні функції, які асоційовані з H^p. Нові результати отримані для внутрішньої функції.

Ключові слова: голоморфні функції, гармонічні функції, внутрішні функції, простори Харді.

Abstract. Theory of the Hardy spaces H^p is actual. One is the main topic in modern mathematics. We studied the Hardy spaces and inner functions, which are associated with H^p. The new results are obtained for the inner function.

Key words: holomorphic functions, harmonic functions, inner function, Hardy spaces.

I. Вступ

Теорія просторів Харді є наріжним каменем сучасного аналізу. Вона поєднує у собі методи функціонального аналізу, теорії аналітичних функцій та інтеграції Лебега, створює потужний інструмент для багатьох застосувань, чистих і прикладних, від обробки сигналів та аналізу Фур'є до принципів максимального модуля та дзета-функції Рімана. Нею займались такі математики: Р. Аренс, Г. Вер, Є. Бішоп, Л. Карлесон, А. Глісон, П. Халмош, В. Рудін, Г. Шапіро та інші.

Відповідно до цього, актуальність обраної тематики полягає у тому, що простори Харді відіграють важливу роль у вивченні граничних властивостей функцій, гармонічному аналізі, теорії степеневих рядів, лінійних операторів, випадкових процесів, екстремальних і апроксимаційних задачах. Задачі, що виникають у просторах Харді є актуальними та сучасними для розвитку математики на інших споріднених дисциплін.

II. Попередні відомості

2.1 Голоморфні та гармонічні функції

Нехай D є відкритим одиничним кругом комплексної площини:

$$D = \{z : |z| < 1\}, \tag{2.1}$$

а C – одиничне коло

$$C = \{z : |z| = 1\}. \tag{2.2}$$

Комплекснозначна функція f голоморфна у D, якщо вона є сумою ряду, що збігається

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (2.3)$$

Це значить, що функція f має похідну в кожній точці D. Комплекснозначна функція u на D гармонічна, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0. \qquad (2.4)$$

Будь-яка голоморфна функція є комплекснозначною гармонічною функцією. відповідно, голоморфну функцію можна представити у вигляді суми двох гармонічних функцій, одна з яких дійсна, а інша-уявна

$$f = u + iv, \qquad (2.5)$$

де u дійсна части на, а v - уявна частина функції f.

Одне більш поширене означення голоморфної функції наступне: комплекснозначна функція f називається голоморфною у деякій множині A комплексної площини, якщо дійсна та уявна частини її є гармонічними функціями які задовольняють умові Коші - Рімана для кожної точки з деяким околом множини A

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \text{та} \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}, \qquad (2.6)$$

часткові похідні мають бути неперервними функціями на множині голоморфності.

2.2 Простори H^1 та H^p

Якщо $0 < p \leq \infty$, то ми позначимо через H^p клас аналітичних функцій f в одиничному крузі, для яких функції $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ обмежені по L^p - нормі при $r \to 1$. Якщо $1 \leq p \leq \infty$, то H^p – простір Банаха з нормою

$$\|f\| = \|f_r\|_p \ , \qquad (2.7)$$

тобто H^p - замкнутий простір відповідного простору гармонічних функцій. Якщо $1 < p \leq \infty$, то ми можемо тотожно прирівняти H^p до замкнутого підпростору L^p на колі. Простір H^p складається з усіх функцій f з L^p, для яких:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta}\, d\theta = 0, \qquad n = 1,2,3, \ldots \qquad (2.8)$$

Якщо $p = 1$, то маємо ототожнення H^1 із замкнутим простором скінчених норм μ на колі, які аналітичні

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 0, \qquad n = 1,2,3, \ldots \qquad (2.9)$$

Будь-яка міра μ голоморфна з необхідністю абсолютно неперервна відносно міри Лебега. Тобто H^1 ототожнюється з простором функцій, що інтегруються по Лебегу на колі, таких, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f\,(\theta) d\theta = 0, \qquad n = 1,2,3, \ldots \qquad (2.10)$$

2.3 Внутрішні та зовнішні функції

Нехай f – ненульова функція класу H^1 в одиничному крузі.

Внутрішня функція є голоморфна функція f в одиничному крузі, така, що $|f(z)| \leq 1$ та $\left|f(e^{i\theta})\right| = 1$ майже всюди на одиничному колі. Зовнішня функція є голоморфна в одиничному крузі функція F виду

$$F(z) = \lambda \, exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}k(\theta)\, d\theta\right], \qquad (2.11)$$

де k – дійсна інтегруєма функція на колі, а λ - комплексне число, що за модулем рівне 1. Легко бачити, що така зовнішня функція F лежить в H^1 тоді і тільки тоді, коли інтегруєма функція e^k; якщо F – зовнішня функція з H^1 , то необхідно $k(\theta) = log\left|F(e^{i\theta})\right|$ майже всюди.

Для нас будуть корисні наступні властивості зовнішніх функцій.

Теорема. Нехай F – ненульова функція з H^1. Справедливі наступні умови:

F – зовнішня функція;

Якщо f – довільна функція з H^1 , така, що $|f| = |F|$ майже всюди на одиничному колі, то $\left|F(z) \geq |f(z)|\right|$ в кожній точці z відкритого одиничного кругу.

$$log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log\left|F\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta. \qquad (2.12)$$

Теорема. Нехай f – ненульова функцій з H^1. Тоді f можемо представити у вигляді $f = gF$, де g – внутрішня функція, а F – внутрішня функція. Цz факторизація єдина з точністю до постійної, що за модулем рівна 1; зовнішня функція F лежить в H^1.

III. Деякі властивості функцій з класу H^p

При дослідженні просторів Харді H^p, було отримано та строго доведено нові результати у класу H^p.

Лема 3.1. Нехай $f(z) = z^n$ для будь − якого $n \in N$, тоді f є внутрішня.

Доведення.

1. Виразимо нашу функцію $f(z) = z^n$, як ряд Тейлора, тобто: $f(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

Відомо, що якщо $f(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k$, то $f(z)$ - голоморфна.

2. Покажемо, що $|z^n| \leq 1$.

$$|z^n| = |z|^n = r^n\left|e^{in\varphi}\right| = r^n\left|e^{i\varphi}\right|^n = r^n|cos\, cos\, n\varphi \, + i\, sin\, sin\, n\varphi\, |$$
$$= r^n\sqrt{n\varphi \, + n\varphi} \, = r^n \cdot 1 = r^n \leq 1$$

3. Покажемо, що на границі кола $|z^n| = 1$

$$|z^n| = |z|^n = r^n\left|\mathrm{e}^{in\varphi}\right| = r^n|cos\, cos\, n\varphi \, + i\, sin\, sin\, n\varphi\, | = 1^n\sqrt{n\varphi \, + n\varphi} \, = 1$$

Отже $f(z) = z^n, n \in N$ є внутрішня.

Лема 3.2. Нехай $f(z) = z^n(1 + z^n)$ для будь − якого $n \in N,$ тоді $f \in H^1$.

Доведення.

$$f(z) = z^n(1 + z^n) = r^n e^{in\theta}\left(1 + r^n e^{in\theta}\right) = r^n e^{in\theta} + r^{2n} e^{2in\theta}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|r^n e^{in\theta} + r^{2n} e^{2in\theta}\right| d\theta = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{in\theta} + r^n e^{2in\theta}\right| d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} |cos\, cos\, n\theta + n\theta + \ r^n\, cos\, cos\, 2n\theta\ + r^n 2n\theta\ |\, d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} |n\theta + \ r^n\, cos\, cos\, 2n\theta)\ + (i\, sin\, sin\, n\theta\ + r^n 2n\theta\ )|\, d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{n\theta + \ r^n\, cos\, cos\, 2n\theta)\ ^2 + (i\, sin\, sin\, n\theta\ + r^n 2n\theta\ )^2}\, d\theta$$

$$\leq \ \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + r^n)^2 + (1 + r^n)^2}\, d\theta = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 4r^n + 2r^{2n}}\, d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\sqrt{2 + 4r^n + 2r^{2n}}\theta| \frac{2\pi}{0} = r^n\sqrt{2 + 4r^n + 2r^{2n}}$$

$$\leq 1^n\sqrt{2 + 4 \cdot 1^n + 2 \cdot 1^{2n}} = \sqrt{8} < \infty$$

Отже, функція $f(z) = z^n(1 + z^n) \in H^1$.

Лема 3.3. Нехай $f(z) = z^n(1 + z^m)$ для будь − яких $n, m \in N$, тоді $f \in H^1$.

Доведення.

$$f(z) = z^n(1 + z^m) = r^n e^{in\theta}\left(1 + r^m e^{im\theta}\right) = r^n e^{in\theta} + r^{n+m} e^{i\theta(n+m)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|r^n e^{in\theta} + r^{n+m} e^{i\theta(n+m)}\right| d\theta = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{in\theta} + r^m e^{i\theta(n+m)}\right| d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} |cos\, cos\, n\theta + n\theta + \ \ r^m\, cos\, cos\, (n + m)\theta\ \ + r^m(n + m)\theta\ |\, d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} |n\theta + \ r^m\, cos\, cos\, (n + m)\theta)\ + (i\, sin\, sin\, n\theta\ + r^m(n + m)\theta\ )|\, d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{n\theta + \ r^m\, cos\, cos\, (n + m)\theta)\ ^2 + (i\, sin\, sin\, n\theta\ + r^m(n + m)\theta\ )^2}\, d\theta$$

$$\leq \ \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + r^m)^2 + (1 + r^m)^2}\, d\theta = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 4r^m + 2r^{2m}}\, d\theta$$

$$= \frac{r^n}{2\pi}\sqrt{2 + 4r^m + 2r^{2m}}\theta| \frac{2\pi}{0} = r^n\sqrt{2 + 4r^m + 2r^{2m}} \leq 1^n\sqrt{2 + 4 \cdot 1^m + 2 \cdot 1^{2m}}$$

$$= \sqrt{8} < \infty$$

Отже, функція $f(z) = z^n(1 + z^m) \in H^1$.

Лема 3.4. Нехай $f(z) = z^n$ для $n \in N,$ тоді $f \in H^1$.

Доведення.

1. $f(z) = z^n, n \in N$ - голоморфна.
2. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|z^n|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|r^n e^{in\theta}\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|cos\, cos\, n\theta\ + i$

$sin\, sin\, n\theta\ |d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{n\theta\ + n\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\theta|\frac{2\pi}{0} = 1 < \infty$

Отже $f(z) = z^n, n \in N\ \in H^1$.

Лема 3.5. Нехай $f(z) = z^n$ для будь − якого $n \in N$. Тоді $f \in H^{\mathrm{p}}$, де $\mathrm{p} \geq 1$.

Доведення.

1. $f(z)$ – голоморфна.
2. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|z^n|^p\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left|r^n e^{in\theta}\right|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|cos\, cos\, n\theta\ + i$

$sin\, sin\, n\theta\ |^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{n\theta\ + n\theta}\right)^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1^p\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\theta|\frac{2\pi}{0} = 1 < \infty$

Отже $f(z) = z^n \in \mathrm{H}^{\mathrm{p}}$.

Лема 3.6. Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$, $\alpha_k \epsilon C$. Тоді $f \in H^{\mathrm{p}}$, де $\mathrm{p} \geq 1$.

Доведенн.

1) $f(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ - голоморфна.
2) Розглянемо випадки:

1. Нехай k =1 тоді $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha_0 + \alpha_1 z|^P \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha_0 + \alpha_1 e^{i\varphi}|^P\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha_0 + \alpha_1 cos\varphi + i\alpha_1 sin\varphi|^P\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1 cos\varphi)^2 + (\alpha_1 sin\varphi)^2}^{\,p}\ d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{{\alpha_0}^2 + {\alpha_1}^2 cos^2\varphi + 2\alpha_0\alpha_1 cos\varphi + {\alpha_1}^2 sin^2\varphi}^{\,P}\ d\theta$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{{\alpha_0}^2 + {\alpha_1}^2 + 2\alpha_0\alpha_1}^{\,P}\ d\theta = \sqrt{{\alpha_0}^2 + {\alpha_1}^2 + 2\alpha_0\alpha_1}^{\,P} < \infty$$

2. Нехай k =2 тоді $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2|^P\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\alpha_0+\alpha_1 e^{ip}+\alpha_2 e^{2ip}|^p\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\alpha_0+\alpha_1 cos\varphi+\alpha_2 cos2\varphi+i(\alpha_1 sin\varphi+\alpha_2 sin2\varphi)|^p\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{(\alpha_0+\alpha_1 cos\varphi+\alpha_2 cos2\varphi)^2+(\alpha_1 sin\varphi+\alpha_2 sin2\varphi)^2}^{\,p}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\begin{matrix}{\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2cos^2\varphi+{\alpha_2}^2cos^22\varphi+2\alpha_0\alpha_1cos\varphi+2\alpha_0\alpha_2cos2\varphi+\\ +2\alpha_1\alpha_2cos\varphi cos2\varphi+{\alpha_1}^2sin^2\varphi+2\alpha_1\alpha_2sin\varphi sin2\varphi+\alpha_2^2\,sin^2\varphi\end{matrix}}^{\,p}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\begin{matrix}{\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+2\alpha_0\alpha_1cos\varphi+2\alpha_0\alpha_2cos2\varphi+2\alpha_1\alpha_2cos\varphi cos2\varphi+\\ +2\alpha_1\alpha_2sin\varphi sin2\varphi\end{matrix}}^{\,p}\,d\theta$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{{\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+2\alpha_0\alpha_1+2\alpha_0\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2}^{\,p}\,d\theta =$$

$$\sqrt{{\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+2\alpha_0\alpha_1+2\alpha_0\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2}^{\,p}<\infty$$

3. Нехай k =3 тоді $f(z)=\alpha_0+\alpha_1\,z+\alpha_2\,z^2+\alpha_3\,z^3$

За аналогією:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(\alpha_0+\alpha_1cos\varphi+\alpha_2cos^2\varphi+\alpha_3cos^3\varphi)$$
$$+\,i(\alpha_1sin\alpha+\alpha_2sin2\alpha+\alpha_3sin3\alpha)|^p\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\begin{matrix}{\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2+2\alpha_0\alpha_1+2\alpha_0\alpha_2+2\alpha_0\alpha_3+4\alpha_1\alpha_2+\\ +4\alpha_1\alpha_3\;+4\alpha_2\alpha_3\end{matrix}}^{\,p}\,d\theta$$

$$=\sqrt{{\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2+2\alpha_0\alpha_1+2\alpha_0\alpha_2+2\alpha_0\alpha_3+\;4\alpha_1\alpha_2+4\alpha_1\alpha_3+4\alpha_2\alpha_3}^{\,p}$$
$$<\infty$$

4. Нехай k =n, тоді $f(z)=\alpha_0+\alpha_1\,z+\alpha_2\,z^2+\ldots+\alpha_n\,z^n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k$

За аналогією

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha^k\right|^p d\theta$$

$$=\sqrt{({\alpha_0}^2+{\alpha_1}^2+\cdots{\alpha_0}^n)+2(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n)}^{\,\mathrm{p}}<\infty$$

Отже $f=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k\ \in H^P$.

IV. Окремі властивості внутрішніх функцій

У цьому розділі, були досліджені властивості внутрішніх функцій. Внутрішні функції відіграють ключову роль у теорію просторів Харді. Було отримано досліджено та отримано такі нові властивості:

Теорема 4.1.

Нехай f_1 та f_2 – внутрішні функції, $|f_1| \leq 1$ та $|f_2| \leq 1$; $\alpha \in C$ та $|\alpha| = 1$, тоді:

1) $f_1 + f_2$ – не є внутрішньою функцією;
2) $f_1 \cdot f_2$ – внутрішня функція;
3) $f_1 \circ f_2$ – не є внутрішньою функцією;
4) αf_1 є внутрішньою функцією;
5) $\frac{1}{\alpha} f_1$ є внутрішньою функцією.

Доведення.

Для функцій f_1 та f_2 розглянемо функцію $f_1 + f_2$, що не є внутрішньою функцією. Покажемо це:

Контрприклад: Нехай $f_1 = z, f_2 = z^2$, тоді $f_1 + f_2 = z + z^2 = z(1+z)$.

Покажемо, що $f_1 + f_2 = z(1+z)$ не є внутрішньою функцією.

Для цього доведемо, що $|f_1 + f_2| > 1 |z(1+z)| = |z||1+z| = |re^{i\varphi}||1+re^{i\varphi}| = |r||e^{i\varphi}||1+re^{i\varphi}| = |r||\cos\varphi + i\sin\varphi||1+re^{i\varphi}| = |r|\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}|1+re^{i\varphi}| = |r||1+re^{i\varphi}|$

1) Нехай $z \in C, (z = 1 \cdot e^{i\varphi}, r = 1)$, тоді $|r||1+re^{i\varphi}| = |1||1+1 \cdot e^{i\varphi}| > 1$, що показує, що $f_1 + f_2 = z(1+z)$ не є внутрішньою функцією

2) Для функцій f_1 та f_2 розглянемо функцію $f_1 \cdot f_2$. Покажемо, що $f_1 \cdot f_2$ є внутрішньою функцією.

1. $|f_1 \cdot f_2| \leq 1$

$|f_1 \cdot f_2| = |f_1||f_2| \leq 1$, ця умова виконується.

2. $|f_1 \cdot f_2| = 1$

$|f_1 \cdot f_2| = |f_1||f_2| = 1$на колі, а отже ця умова виконується.

Тоді, функція $f_1 \cdot f_2$ є внутрішньою.

3) Для функцій $f_1 = z^n$ та $f_2 = z^m$ розглянемо функцію $f_1 \circ f_2$. Покажемо, що $f_1 \circ f_2$ не є внутрішньою функцією.

Контрприклад: Нехай $f_1 = z^2, f_2 = e^z$, тоді $f_1 \circ f_2 = e^{z^2}$. Покажемо, що $f_1 \circ f_2 = e^{z^2}$ не є внутрішньою функцією.

1. $|f_1 \circ f_2| \leq 1$

$|e^{z^2}| = |e^{x^2-y^2+2ixy}| = |e^{x^2-y^2}e^{2ixy}|$, розглянемо для випадку, коли $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, тоді $x^2 = \frac{3}{4}$, $y^2 = \frac{1}{4}$, маємо:

$$\left|e^{z^2}\right| = \left|e^{x^2-y^2+2ixy}\right| = \left|e^{x^2-y^2}e^{2ixy}\right| = \left|e^{x^2-y^2}\right|\left|e^{2ixy}\right| = \left|e^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}\right|\left|e^{2i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right| =$$

$$\left|e^{\frac{1}{2}}\right|\left|e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \left|\sqrt{e}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{3}}{2})\right| = \left|\sqrt{e}\right|\left|\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right| =$$

$$\sqrt[4]{e}\sqrt{\cos^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{e} > 1.$$

Отже, функція $f_1 \circ f_2$ не є внутрішньою.

4) Покажемо, що αfє внутрішньою функцією.

1. $|\alpha f| \leq 1$

$|\alpha f| = |\alpha||f| = 1|f| = |f| \leq 1$, ця умова виконується.

2. $|\alpha f| = 1$

$|\alpha f| = |\alpha||f| = 1|f| = |f| = 1$ на колі, отже ця умова виконується.

Тоді, αf є внутрішньою функцією.

5) Покажемо, що $\frac{1}{\alpha} f$ є внутрішньою функцією.

1. $\left|\frac{1}{\alpha} f\right| \leq 1$

$\left|\frac{1}{\alpha} f\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| |f| = \frac{1}{|\alpha|}|f| = \frac{1}{1}|f| = |f| \leq 1$, ця умова виконується.

2. $\left|\frac{1}{\alpha} f\right| = 1$

$\left|\frac{1}{\alpha} f\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| |f| = \frac{1}{|\alpha|}|f| = \frac{1}{1}|f| = |f| = 1$ на колі, отже ця умова виконується.

Тоді, $\frac{1}{\alpha} f$ є внутрішньою функцією.

Наслідок 4.2.

Нехай f - внутрішня функція; $\alpha \in C$ та $|\alpha| = 1$, тоді $|\alpha f|^n$ – внутрішня функція.

Доведення.

Покажемо, що $|\alpha f|^n$ є внутрішньою функцією.

1.$|\alpha f|^n \leq 1$

$|\alpha f|^n = |\alpha|^n|f|^n = 1^n|f|^n = |f|^n \leq 1$, ця умова виконується.

2. $|\alpha f|^n = 1$

$|\alpha f|^n = |\alpha|^n|f|^n = 1^n|f|^n = |f|^n = 1$ на колі, отже ця умова виконується.

Тоді, αfє внутрішньою функцією.

Лема 4.3.

Нехай $f_1 = z^n$ та $f_2 = z^m$ – внутрішні функції; $\alpha \in C$ та $|\alpha| = 1$, тоді:

1. $f_1 + f_2$ – не є внутрішньою функцією;
2. $f_1 \cdot f_2$ – внутрішня функція;
3. $f_1 \circ f_2$ – внутрішня функція;

4. αf_1 є внутрішньою функцією;

5. $\frac{1}{\alpha} f_1$ є внутрішньою функцією.

Доведення.

1) Для функцій $f_1 = z^n$ та $f_2 = z^m$ розглянемо функцію $f_1 + f_2 = z^n + z^m$. Покажемо, що $f_1 + f_2 = z^n + z^m$ не є внутрішньою функцією.

1.$|f_1 + f_2| \le 1$

$|z^n + z^m| = |r^n e^{in\varphi} + r^m e^{im\varphi}| = |r^n e^{in\varphi}| + |r^m e^{im\varphi}| = |r^n||e^{in\varphi}| + |r^m||e^{im\varphi}| = |r^n||\cos n\varphi + i \sin n\varphi| + |r^m||\cos m\varphi + i \sin m\varphi| = |r^n|\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} + |r^m|\sqrt{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = |r^n| + |r^m| \le 1$, а це виконується не завжди. Наприклад: $r = 0{,}9$, тоді $|0{,}9^n| + |0{,}9^m|$ не буде менше або дрівнювати1.

2) Для функцій $f_1 = z^n$ та $f_2 = z^m$ розглянемо функцію $f_1 \cdot f_2 = z^n \cdot z^m = z^{n+m}$. Покажемо, що $f_1 \cdot f_2 = z^n \cdot z^m = z^{n+m}$ є внутрішньою функцією.

1. $|f_1 \cdot f_2| \le 1$

$|z^n \cdot z^m| = |z^{n+m}| = |r^{n+m} e^{i(n+m)\varphi}| = |r^{n+m}||e^{i(n+m)\varphi}| = |r^{n+m}||\cos(n + m)\varphi + i \sin(n+m)\varphi| = |r^{n+m}|\sqrt{\cos^2(n+m)\varphi + \sin^2(n+m)\varphi} = |r^{n+m}| \cdot 1 = r^{n+m} \le 1$, ця умова виконується.

2. $|f_1 \cdot f_2| = 1$

$|z^n \cdot z^m| = |z^{n+m}| = |r^{n+m} e^{i(n+m)\varphi}| = |r^{n+m}||e^{i(n+m)\varphi}| = |1^{n+m}||\cos(n + m)\varphi + i \sin(n+m)\varphi| = \sqrt{\cos^2(n+m)\varphi + \sin^2(n+m)\varphi} = 1$, ця умова виконується.

Отже, функція $f_1 \cdot f_2$ є внутрішньою.

3) Для функцій $f_1 = z^n$ та $f_2 = z^m$ розглянемо функцію $f_1 \circ f_2 = z^n \circ z^m = z^{nm}$. Покажемо, що $f_1 \circ f_2 = z^n \circ z^m = z^{nm}$ є внутрішньою функцією.

1. $|f_1 \circ f_2| \le 1$

$|z^n \circ z^m| = |z^{nm}| = |r^{nm} e^{inm\varphi}| = |r^{nm}||e^{inm\varphi}| = |r^{nm}||\cos nm\varphi + i \sin nm\varphi| = |r^{nm}|\sqrt{\cos^2 nm\varphi + \sin^2 nm\varphi} = |r^{nm}| \cdot 1 = r^{nm} \le 1$, ця умова виконується.

2. $|f_1 \circ f_2| = 1$

$|z^n \circ z^m| = |z^{nm}| = |r^{nm} e^{inm\varphi}| = |r^{nm}||e^{inm\varphi}| = |1^{nm}||\cos nm\varphi + i \sin nm\varphi| = \sqrt{\cos^2 nm\varphi + \sin^2 nm\varphi} = 1$, ця умова виконується.

Отже, функція $f_1 \circ f_2$ є внутрішньою.

4) Покажемо, що $\alpha f = \alpha z^n$ є внутрішньою функцією.

1. $|\alpha z^n| \le 1$

$|\alpha z^n| = |\alpha||z^n| = 1|z^n| = |z^n| = |r^n e^{in\varphi}| = |r^n||e^{in\varphi}| = |r^n||\cos n\varphi + i \sin n\varphi| = |r^n|\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = |r^n| \cdot 1 = r^n \le 1$, ця умова виконується.

2. $|\alpha z^n| = 1$

$|\alpha z^n| = |\alpha||z^n| = 1|z^n| = |z^n| = \left|r^n e^{in\varphi}\right| = |r^n|\left|e^{in\varphi}\right| = |1^n||\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = 1\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = 1$, ця умова виконується.

Отже, $\alpha f = \alpha z^n$ є внутрішньою функцією.

5) Покажемо, що $\frac{1}{\alpha} f = \frac{1}{\alpha} z^n$ є внутрішньою функцією.

1. $\left|\frac{1}{\alpha} z^n\right| \leq 1$

$\left|\frac{1}{\alpha} z^n\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| |z^n| = \frac{1}{|\alpha|}|z^n| = \frac{1}{1}|z^n| = \left|r^n e^{in\varphi}\right| = |r^n|\left|e^{in\varphi}\right| = |r^n||\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = |r^n|\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = |r^n| \cdot 1 = r^n \leq 1$, ця умова виконується.

2. $\left|\frac{1}{\alpha} z^n\right| = 1$

$\left|\frac{1}{\alpha} z^n\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| |z^n| = \frac{1}{|\alpha|}|z^n| = \frac{1}{1}|z^n| = \left|r^n e^{in\varphi}\right| = |r^n|\left|e^{in\varphi}\right| = |1^n||\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = 1\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = 1$, ця умова виконується.

Отже, $\alpha f = \alpha z^n$ є внутрішньою функцією.

Наслідок 4.4.

Нехай $f = z$ - внутрішня функція; $\alpha \in C$ та $|\alpha| = 1$, тоді $|\alpha f|^n$ – внутрішня функція.

Доведення.

Покажемо, що $|\alpha f|^n = |\alpha z|^n$ є внутрішньою функцією.

1. $|\alpha z|^n \leq 1$

$|\alpha z|^n = |\alpha|^n|z|^n = 1^n|z^n| = |z^n| = \left|r^n e^{in\varphi}\right| = |r^n|\left|e^{in\varphi}\right| = |r^n||\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = |r^n|\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = |r^n| \cdot 1 = r^n \leq 1$, ця умова виконується.

2. $|\alpha z|^n = 1$

$|\alpha z|^n = |\alpha|^n|z|^n = 1^n|z^n| = |z^n| = \left|r^n e^{in\varphi}\right| = |r^n|\left|e^{in\varphi}\right| = |1^n||\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = 1\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = 1$, ця умова виконується.

Отже, $\alpha f = \alpha z^n$ є внутрішньою функцією.

Список використаних джерел

1. K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1962).
2. G. H. Hardy, Notes on special system of orthogonal functions (IV): The orthogonal functions of Whittaker's cardinal series. Proc. Cambridge Phil. Soc. 37, 331–348, (1941).
3. J. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions. Proc. London Math. Soc. 23, 481–519 (1925).
4. P. L. Duren, Theory of Hp Spaces. Academic Press, New York (1970).