Ціпура Т.П.
магістрантка спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
факультету математики, інформатики та фізики
НПУ імені М.П.Драгоманова
Науковий керівник: кандидат пед. наук, доцент **Сушко-Крикун О. С.**

СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ В НАВЧАННІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. В статті запропоновано огляд сучасних систем комп'ютерної математики та їх застосування на уроках математики під час розв'язання тригонометричних рівнянь. Розглянуто приклади тригонометричних рівнянь та наведено їх розв'язки з методичними коментарями засобами СКМ GeoGebra, Maple та Mathcad.

Ключові слова: системи комп'ютерної математики, тригонометричні рівняння, Geogebra, Maple, Mathcad.

Abstract. In the article, the review of the modern systems of computer mathematics and their application offers on the lessons of mathematics during the decision of trigonometric equations. The examples of trigonometric equations are considered and their upshots over are brought with methodical comments by facilities of SKM GeoGebra, Maple and Mathcad.

Keywords: computer mathematics systems, trigonometric equations, Geogebra, Maple, Mathcad.

Системи комп'ютерної математики (СКМ) широко застосовуються в наукових дослідженнях, стають обов'язковим компонентом комп'ютерних технологій, які використовуються в освіті.

Такі системи реалізовують стандартні і спеціальні математичні операції, забезпечені графічними засобами та мають власну мову програмування. Усе це надає можливості швидко та ефективно здійснювати математичні обчислення. Для учнів система комп'ютерної математики є помічником у вивченні математики, фізики та інформатики, звільняючи їх від громіздких розрахунків, зосереджуючи увагу на методі розв'язування задачі.

Використання систем комп'ютерної математики в навчальному процесі є дуже популярним і широковживаним у всьому світі. Більше тисячі університетів з 61 країни є офіційними користувачами однієї з таких систем, а саме, Mathematica [1].

Розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей, мабуть, чи не найскладніша тема з шкільного курсу математики. Учням досить важко за умовою задачі з'ясувати, яким методом розв'язання скористатися, як спростити рівняння до найпростішого. Дуже часто розв'язання тригонометричних рівнянь полегшуються шляхом використання графічного методу. Але основні труднощі його застосування полягають в тому, що зазвичай учні ще недосконало відточили вміння побудови графіків тригонометричних функцій. В такому випадку доцільним стає візуалізація та демонстрація розв'язання деяких тригонометричних рівнянь засобами СКМ.

Тому, в цій статті зупинимося на розв'язанні деяких тригонометричних рівнянь з використанням сучасних систем комп'ютерної математики.

GeoGebra — вільно-поширюване динамічне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема, для побудов за допомогою циркуля і лінійки. Крім того, програма володіє багатими можливостями для роботи з функціями (побудова графіків, обчислення коренів, екстремумів, інтегралів тощо) за рахунок команд вбудованої мови (яка, до речі, дає змогу керувати і геометричними побудовами) [2].

Завдання №1. Розв'язати тригонометричне рівняння $cos(x) = -1$.

Для того, щоб розв'язати рівняння, нам необхідно побудувати два графіки функцій $y = cos\,x$ і $y = -1$. Для цього не потрібно будувати таблиці, але потрібно підготувати координатну площину (по осі аргументу - одиничний відрізок $\pi/2$). Для побудови графіка першої функції ми вводимо в рядок формул наступне $f(x) = cosx$.

На екрані з'являється перший графік:

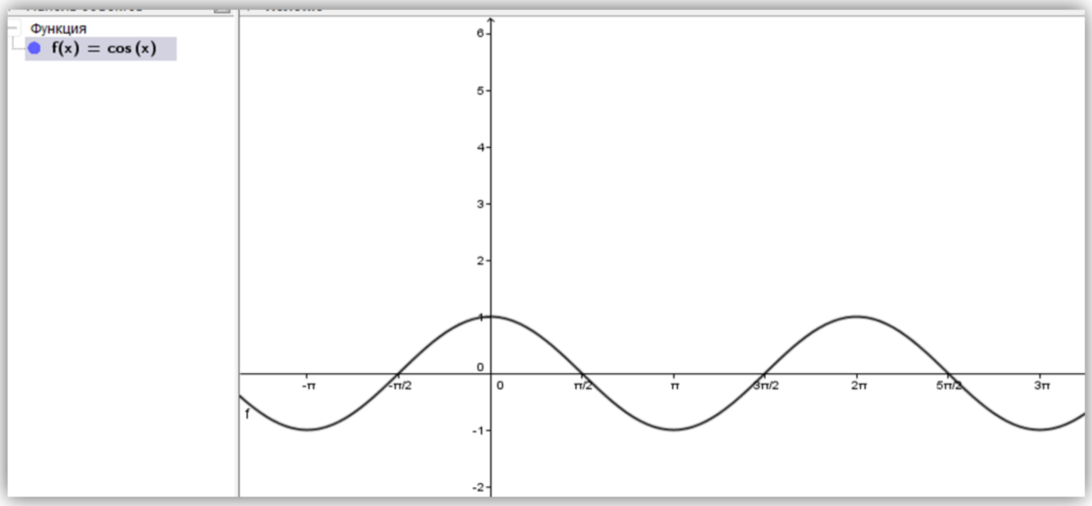

Рис.1

Для побудови графіка лінійної функції вводимо: $f(x) = -1$ і програма автоматично позначаємо точки перетину побудованих графіків функції.

Кінцевий результат:

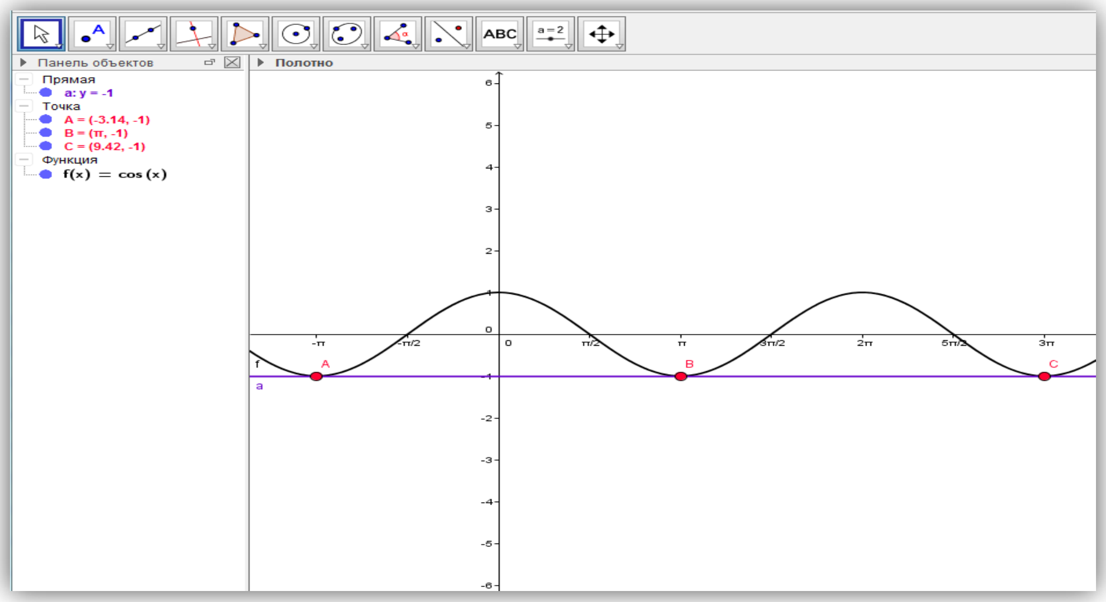

Рис. 2

На основі отриманих візуальних результатів вимагаємо від учнів запису відповіді до розв'язаного рівняння з урахуванням періодичності функції.

Завдання №2. Створити динамічну модель $y = a\cos(bx + c)$ в залежності від параметрів a, b і с (що дасть можливість учням узагальнити підходи до розв'язання подібних тригонометричних рівнянь).

Розв'язання:

Для виконання цього типу завдання потрібно використовувати повзунки, які відповідають за динамічні зміни параметрів функції, при різних значеннях в режимі реального часу.

Спочатку потрібно побудувати графік заданої тригонометричної функції. Вводимо в рядок формул $y = a\cos(bx + c)$, далі створюємо повзунки a, b і с.

Кінцевий результат:

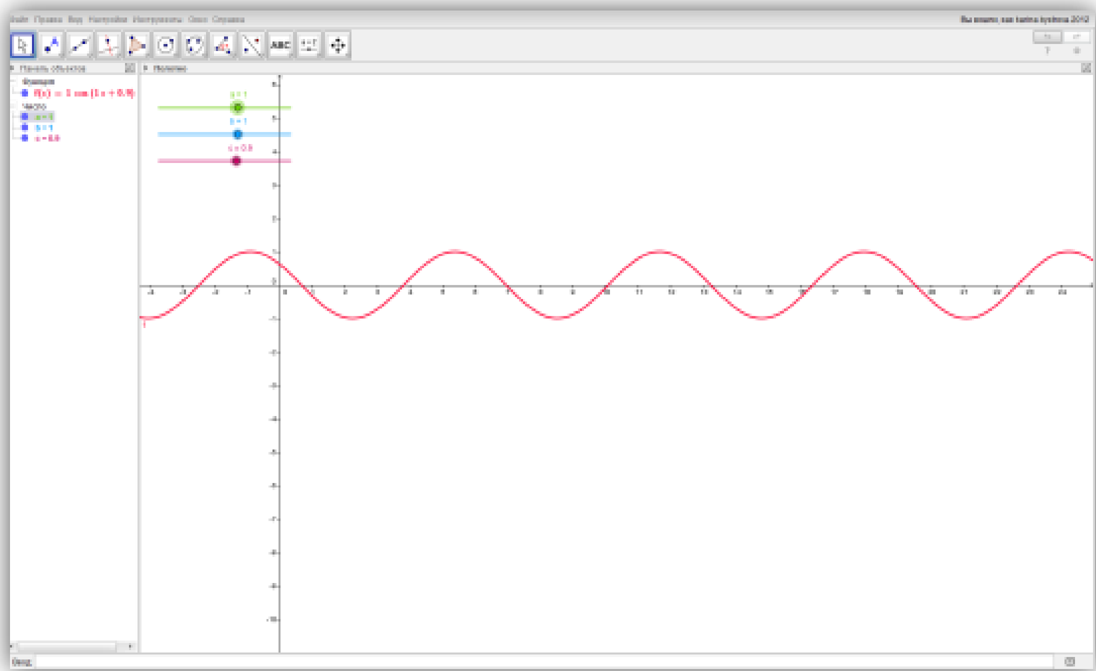

Рис. 3

При зміні будь-якого параметра змінюється поведінка косинусоїди, що, в свою чергу, дозволяє нам наочно побачити зміни графіка, а опція «паузи» дозволяє зафіксувати поведінку графіка при конкретних значеннях параметрів.

Кінцевий результат:

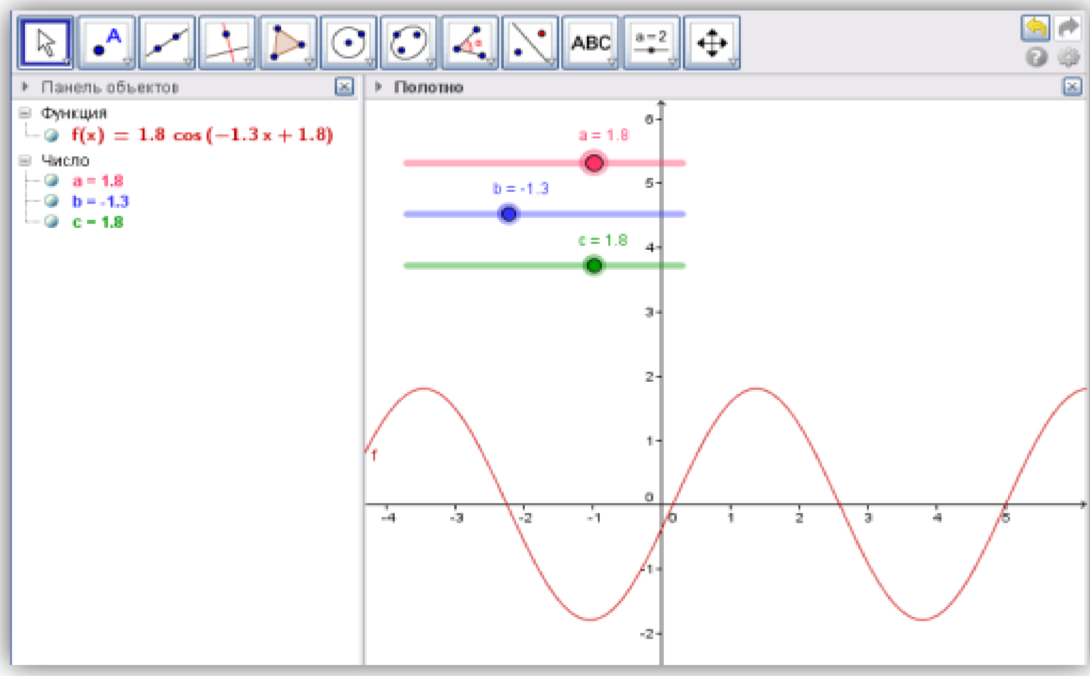

Рис. 4

Пакет Maple здатний розв'язувати велику кількість математичних задач, шляхом введення команд, без будь-якого попереднього програмування. Maple оперує не тільки наближеними числами, а й точними цілими та раціональними числами. Для розв'язання рівнянь використовують функцію solve.

Завдання №3. Розв'язати тригонометричне рівняння $\sin(2x)+1=\cos(2x)$.

Вводимо рівняння: `solve (sin(2*x)+1=cos(2*x))` і отримуємо результат:

$$x=\frac{1}{4}\pi, x=0.$$

При розв'язуванні тригонометричних рівнянь, відповідна СКМ знаходить корені, які належать проміжку $[-\pi;\ \pi]$. Для отримання всіх коренів тригонометричного рівняння використовується команда >`_EnvAllSolutions := true:`.

```
>EnvAllSolutions: = true
>solve(sin(2*x) + 1 = cos(2*x))
```

$$x=\frac{1}{4}\pi+\pi\_Z1\sim,\ x=\pi\_Z2\sim$$

В отриманих відповідях бачимо, що період дійсно є π, але записано за допомогою згенерованої системою Maple змінної _Z1~. Maple використовує змінні вигляду _ZN~, де N – порядковий номер, як цілі числа-посередники. Окрім цілих чисел, можуть вводитись числа типу _B, що свідчить про бінарну форму, тобто 0 або 1, та _NN, що означає невід'ємне число [3]. Позначка ~ свідчить про те, що ця величина є величиною з наближенням.

Завдання №4. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Такого типу рівняння легко розв'язати, оскільки воно зводиться до найпростіших, де шуканий розв'язок буде $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Якщо ж застосувати можливості СКМ Maple для наочності даного прикладу, то необхідно розглянути праву і ліву частину рівнянь як окремі функції, і побудувати графіки цих функцій в одній системі координат:

```
>plot([tan(Pi/3-x/2),1/(sqrt(3))],x=-8..8,-
8..8,discont=true);
```

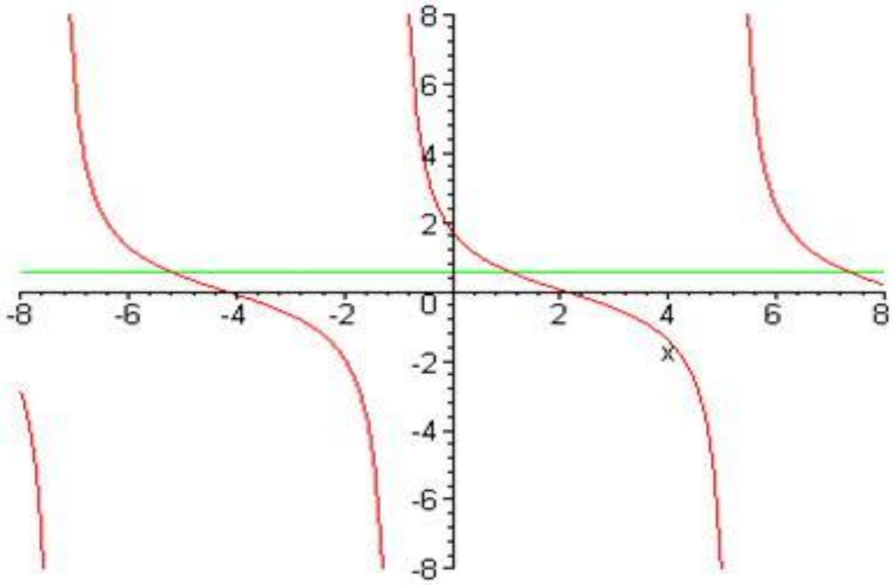

Рис. 5

Абсциси точок перетину цих двох графіків і будуть розв'язками рівняння, що розглядається.

Із всіх видів рівнянь тригонометричні рівняння СКМ MathCad розв'язує найгірше. MathCad знаходить корені лише на проміжку одного періоду функції, заданого в рівнянні. Також, MathCad досить часто робить помилки у розв'язанні тригонометричних рівнянь, особливо, якщо таке рівняння містить параметри, або необхідно враховувати область допустимих значень [4]. Тому на практиці краще будувати графіки таких рівнянь, або намагатися максимально спростити рівняння, виконавши ряд елементарних перетворень.

Завдання №5. Розв'язати рівняння $\cos(2x) = 0$ та вказати корені на проміжку від 0 до π/3.

Побудуємо графік функції $f(x) = \cos(2x)$:

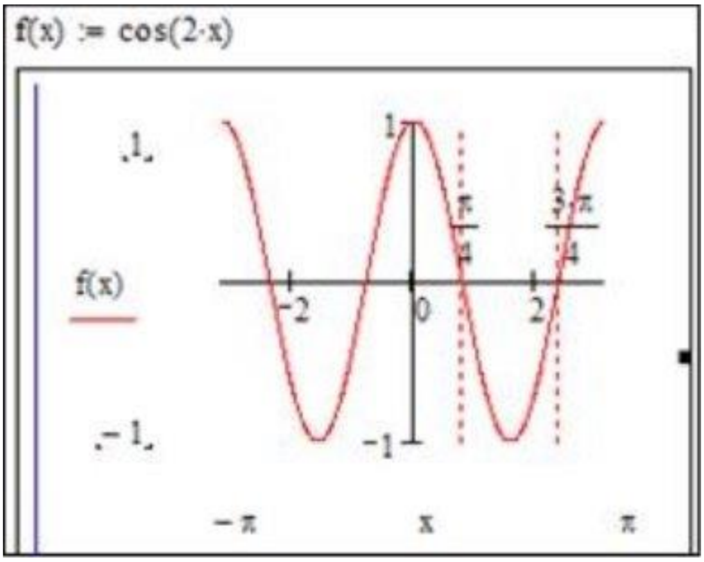

Рис. 6

Змінимо межі по Ox від $(-\pi;\pi)$ для зручності. Поставимо маркери в точках $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{3\pi}{4}$. Всі корені цього рівняння мають вигляд: $\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{2}\right)N, N \in Z$, де Z - множинна цілих чисел [4]. Функція root знайде розвязки рівняння на вказаному проміжку.

$$\mathtt{root}\ \left(f(x), x, 0, \frac{\pi}{3}\right) = 0.785\ \frac{\pi}{4} = |\ 0.785$$

Завдання №6. Знайти розв'язки рівняння $\frac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)} = 0$.

Якщо стандартним чином задати команду MathCad розв'язати дане рівняння, то його реакція буде наступною:

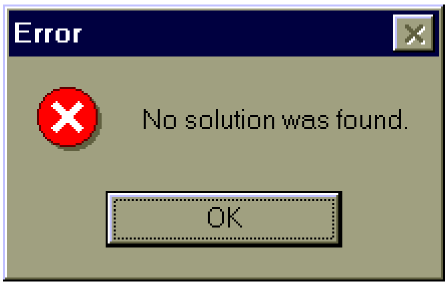

Рис. 7

Даний приклад показує межі можливостей системи MathCad. Виявляється система не здатна розв'язувати складні задачі, а тому застосовується опція Simplify, завдання якої полягає в тому, щоб спочатку спростити умову задачі, а потім знайти її розв'язок, якщо він існує.

Провівши деякі перетворення, вдається знайти розв'язок.

Анализ:

$$\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{1-\left(\cos(x)^2-\sin(x)^2\right)} \quad \text{или} \quad \frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)^2+\sin(x)^2-\left(\cos(x)^2-\sin(x)^2\right)}$$

Команда Symplify
из меню Symbolics:

$$\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x) = 0 \qquad \text{Команда Solve} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\pi \\ \frac{-1}{2}\cdot\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ -1.571 \end{pmatrix}$$

Рис.8

Висновки. Проаналізувавши переваги та недоліки сучасних СКМ можна підсумувати, що грамотне застосування комп'ютерних технологій у навчальному процесі: підвищує фундаментальність математичної освіти; викликає інтерес до вивчення математики; підвищує комп'ютерну грамотність; дає можливість економити час на уроках і, як наслідок, розв'язувати більшу кількість різних за складністю завдань.

Список використаних джерел

1. Кравченко І. В., Микитенко В. І. Інформаційні технології системи комп'ютерної математики. – [Електронний ресурс] / Режим доступу: https://ooep.kpi.ua/downloads/disc/inf_t/ posibn_Krav_Myk.pdf
2. Посібник з динамічної геометрії для вчителів, учнів та їх батьків. – [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://geogebra-geometry.blogspot.com/p/blog-page.html
3. Використання ІКТ при вивченні розділу «Тригонометричні рівняння й нерівності» шкільного курсу алгебри та початків аналізу._– [Електронний ресурс] / Режим доступу: https://naurok.com.ua/vvedennya-ta-redaguvannya-danih-elektronno-tablici-226684.html.
4. MathCad. Розв'язання рівнянь, систем рівнянь та нерівностей._– [Електронний ресурс] / Режим доступу: https://helpiks.org/3-48532.html.