Нитник А.С.
магістрантка спеціальності 111 Математика (фінансова математика)
факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова
Науковий керівник: канд.фіз.-мат. наук, доцент **Гончаренко Я.В.**

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДИФІКАЦІЇ Q-ЗОБРАЖЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Анотація. В роботі досліджено властивості функції, що є моделлю фінансових «хвиль», аргумент і значення якої задані за допомогою модифікованого Q-зображення дійсних чисел. Доведено неперервніть, досліджено монотонність та диференційовність.

Ключові слова: Q-зображення дійсних чисел, неперервність, монотонність, недиференційовність.

Abstract. In this paper investigates the properties of a function that is a model of financial "waves", the argument and value of which are specified using a modified Q-representation of real numbers. Continuity is proved, monotonicity and differentiability are investigated.

Keywords: Q-representation of real numbers, continuity, monotonicity, non-differentiability.

Дослідження функцій з складними локальними властивостями та їх використання в якості математичних моделей реальних процесів та явищ є актуальною математичною та прикладною задачею [1-3]. В прикладних застосуваннях, в задачах моделювання часових рядів використовується багато різних способів, які грунтуються на застосуванні статистичних підходів, різних методів згладжування або апроксимації. В роботі для вирішення поставленої проблеми використовується спосіб аналітичного задання функції зі складними локальними властивостями, що грунтується на використанні модифікації Q-зображень дійних чисел [1].

Дана робота є продовженням роботи [4], в якій було запропоновано аналітичне задання функції, що моделює деякий часовий ряд, та обгрунтовано коректність цього задання. В даній роботі досліджено властивості побудованої функції.

Припустимо, що розглядається часовий ряд, який на першому кроці наближення може бути зображений десятиланковою ламаною (або п’ятьма «хвилями» [2]), а на всіх кроках, починаючи з другого кожна ланка ламаної буде замінюватися на ламану, яка складається з 5 ланок (рис.1). При цьому вершини нових ламаних ділять початковий відрізок в співвідношеннях однакових для всіх кроків побудови (хоча для зростаючих і спадних ланок вони можуть відрізнятись) [4].

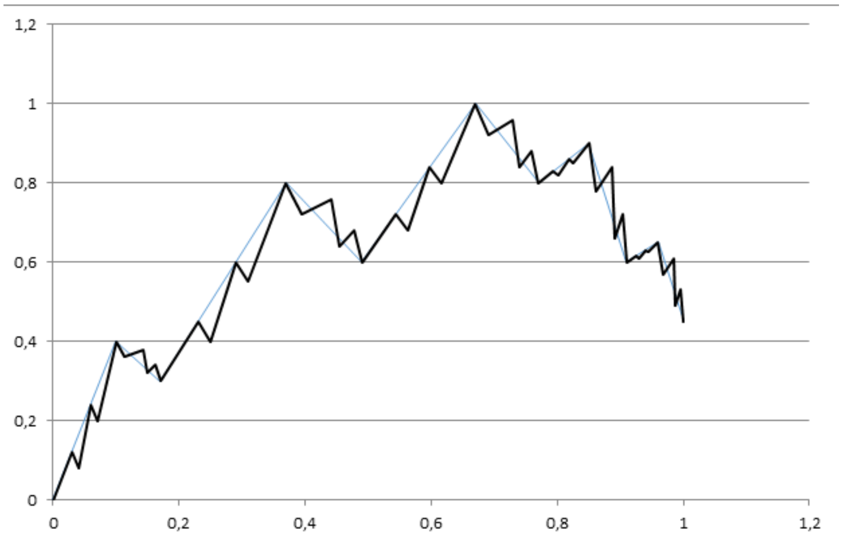

Рис. 1.

В попередній доповіді було обгрунтовано коректність задання функції:

$$f\left(\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)=\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\quad \alpha_1\in\{0,\ldots,9\},\alpha_j\in\{0,\ldots,4\}, j=\overline{2,\infty}\,,\quad (1)$$

де $\quad 0<q_i<1,\ \sum_{i=0}^{9}q_i=1,$

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix} q_{0(2k)} & q_{1(2k)} & q_{2(2k)} & q_{3(2k)} & q_{4(2k)} \\ q_{0(2k-1)} & q_{1(2k-1)} & q_{2(2k-1)} & q_{3(2k-1)} & q_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, k=\overline{0,\infty}, 0<q_{ij}<1,$$

$$\sum_{i=0}^{4}q_{ij}=1\,, j\in\{0,1,\ldots,4\}.$$

$$b_{\alpha_1}=\begin{cases} 0, & \alpha_1=0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1}q_i\,, & \alpha_1\in\{1,\ldots,9\}\end{cases}, \quad b_{\alpha_j j}=\begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_j=0\,, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_j-1}q_{ij}\,, & \text{якщо } \alpha_j\in\{1,2,3,4\}.\end{cases}$$

$$x=b_{\alpha_1}+b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1}+b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}+b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2}+\cdots=$$

$$=b_{\alpha_1}+\sum_{n=2}^{\infty}(\,b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}\prod_{j=2}^{n-1}q_{\alpha_j\alpha_{j-1}})=\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

$$0<q_i\le u_i<1, u_0-u_1+u_2-u_3+u_4=1, 1-u_5+u_6-u_7+u_8-u_9=1,$$

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix} u_{0(2k)} & u_{1(2k)} & u_{2(2k)} & u_{3(2k)} & u_{4(2k)} \\ u_{0(2k-1)} & u_{1(2k-1)} & u_{2(2k-1)} & u_{3(2k-1)} & u_{4(2k-1)} \end{pmatrix},\ k=\overline{0,\infty}, 0<q_{ij}\le u_{ij}<1,$$

$$\sum_{i=0}^{4}(-1)^i u_{ij}=1\,, j\in\{0,1\}\,,$$

$$d_{\alpha_1}=\begin{cases} 0, & \alpha_1=0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1}u_i\,, & \alpha_1\in\{1,\ldots,9\}\end{cases}$$

$$d_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_j = 0, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}} u_{0\alpha_{j-1}}, \text{якщо } \alpha_j = 1, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}} \left(u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}}\right), \text{якщо } \alpha_j = 2, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}} \left(u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}}\right), \text{якщо } \alpha_j = 3, \\ (-1)^{\alpha_{j-1}} \left(u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}} - u_{3\alpha_{j-1}}\right), \text{якщо } \alpha_j = 4 \end{cases},$$

$$y = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2\alpha_1} u_{\alpha_1} + d_{\alpha_3\alpha_2} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2\alpha_1} + d_{\alpha_4\alpha_3} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2\alpha_1} u_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots =$$
$$= d_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (d_{\alpha_n\alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} u_{\alpha_j\alpha_{j-1}}) = \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

В даній роботі пропонується результати дослідження деяких властивостей заданої функції.

Властивість 1. $D(f) = [0;1], E(f) = [0;1]$.

Ця властивість випливає із задання функції.

Властивість 2. Функція, задана рівністю (1), неперервна на $[0;1]$, при цьому в точці 0 функція неперервна зліва, а в точці 1 – справа.

Доведення.

Розглянемо точку $x_0 \in (0;1)$.

Можливі такі випадки.

І) Нехай розглянемо випадок Q-раціональних точок $x_0 = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)} = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_m-1)(4)}$, $\alpha_1 = \overline{0,9}, \alpha_j = \overline{0,4}, j = \overline{2,m}$.

Розглянемо $x_n = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\underbrace{0\ldots0}_{n}1(0)}, x_n \geq x_0$, тоді

$$x_n - x_0 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1} q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots +$$
$$+ b_{\alpha_m\alpha_{m-1}} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} + b_{0\alpha_m} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} +$$
$$+ b_{00} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} q_{0\alpha_m} + \cdots +$$
$$+ b_{10} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} q_{0\alpha_m} {q_{00}}^{n-2} +$$
$$+ b_{01} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} q_{0\alpha_m} {q_{00}}^{n-2} q_{10} +$$
$$+ b_{00} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} q_{0\alpha_m} {q_{00}}^{n-2} q_{10} q_{01} +$$
$$+ \cdots - (b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1} q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} +$$
$$+ b_{\alpha_4\alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + b_{\alpha_m\alpha_{m-1}} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} +$$
$$+ b_{0\alpha_m} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} + b_{00} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{0\alpha_m} + b_{00} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{0\alpha_m} q_{00} + \cdots).$$

Зробимо заміну $b_{0j} = 0, j = \overline{0,4}$, тоді

$$x_n - x_0 = b_{10} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{0\alpha_m} {q_{00}}^{n-2} \to 0 \ (n \to \infty),$$

оскільки $q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \cdots q_{4\alpha_m} {q_{44}}^{n-2} \to 0$.

$$x_n \to x_0(+0).$$

Розглянемо $x'_n = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_m-1)\underbrace{4\ldots4}_{n}0(4)}$, $x'_n \le x_0$, тоді

$$\begin{gathered}
x'_n - x_0 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + \\
+b_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} + \\
+b_{4(\alpha_m-1)}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}} + \\
+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m} + \cdots + \\
+b_{04}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + \\
+b_{40}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}q_{04} + \\
+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}q_{04}q_{40} + \cdots - (b_{\alpha_1} + \\
+b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + \\
+b_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} + \\
+b_{4(\alpha_m-1)}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}} + \\
+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4(\alpha_m-1)} + \\
+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4(\alpha_m-1)}q_{44} + \cdots) = \\
= b_{04}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + \\
+b_{40}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}q_{04} + \\
+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}q_{04}q_{40} + \cdots - \\
-(b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4(\alpha_m-1)}{q_{44}}^{n-2} + \\
+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4(\alpha_m-1)}{q_{44}}^{n-2}q_{44} + \cdots) = \\
= -b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{(\alpha_m-1)\alpha_{m-1}}q_{4(\alpha_m-1)}{q_{44}}^{n-2} + (b_{40}q_{04} - b_{44}q_{44}) \cdot \\
\cdot q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + (q_{04}q_{40} - q_{44}q_{44})b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + \\
+(q_{04}q_{40} - q_{44}q_{44})b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}q_{44} + \cdots = \\
= -b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + (b_{40}q_{04} - b_{44}q_{44})q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + \\
+(q_{04}q_{40} - q_{44}q_{44})b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}(1 + q_{44} + {q_{44}}^2 + \cdots) = \\
= -b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + (b_{40}q_{04} - b_{44}q_{44})q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2} + \\
+(q_{04}q_{40} - q_{44}q_{44})b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}\frac{1}{1-q_{44}} = \\
= q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_m}{q_{44}}^{n-2}(-b_{44} + b_{40}q_{04} - b_{44}q_{44} + q_{04}q_{40} - q_{44}q_{44}) \cdot \\
\cdot b_{44}\frac{1}{1-q_{44}}.
\end{gathered}$$

Зробимо заміну:

$$\begin{gathered}
b_{04} = 0; \\
b_{40} = q_{00} + q_{10} + q_{20} + q_{30} = 1 - q_{40}; \\
b_{44} = q_{04} + q_{14} + q_{24} + q_{34} = 1 - q_{44},
\end{gathered}$$

тоді

$$x'_n - x_0 = q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \dots q_{4\alpha_m} {q_{44}}^{n-2}(-1 + q_{44} + q_{04} - q_{04}q_{40} - q_{44} + q_{44}q_{44} +$$
$$+q_{04}q_{40} - q_{44}q_{44})(1 - q_{44})\frac{1}{1 - q_{44}} = q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \dots q_{4\alpha_m} {q_{44}}^{n-2}(-1 + q_{04}) =$$
$$= q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \dots q_{4\alpha_m} {q_{44}}^{n-2}(-1 + q_{04}) \to 0(n \to \infty),$$

оскільки $0 < q_{04} < 1$ та $q_{\alpha_1} q_{\alpha_2\alpha_1} \dots q_{4\alpha_m} {q_{44}}^{n-2} \to 0(n \to \infty)$.

Отже,

$$x'_n \to x_0(-0).$$

Покажемо, що $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(x_0)$. Для цього розглянемо

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left|\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m\underbrace{0\dots0}_{n}1(0)} - \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m(0)}\right| =$$
$$= |d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1} + d_{\alpha_3\alpha_2}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} + d_{\alpha_4\alpha_3}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_3\alpha_2} + \dots +$$
$$+d_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} + d_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}} +$$
$$+d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m} + \dots +$$
$$+d_{10}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} + d_{01}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}u_{10} +$$
$$+d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}u_{10}u_{01} + \dots - (d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1} + d_{\alpha_3\alpha_2}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} +$$
$$+d_{\alpha_4\alpha_3}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_3\alpha_2} + \dots + d_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} +$$
$$+d_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}} + d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{0\alpha_m} + d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{0\alpha_m}u_{00} +$$
$$+ \dots | = \left|d_{10}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}\right| \to 0\ (n \to \infty),$$

оскільки $0 < u_{ij} < 1 \Rightarrow u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1} \dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} \longrightarrow 0(n \to \infty)$.

Отже, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Аналогічно $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(x_0)$.

Розглянемо $\forall(a_m)$: $a_m \longrightarrow x_0\ (m \longrightarrow \infty)$.

Тоді для довільного достатньо великого значення m можна вказати n таке, що:

$$x_n \le a_m \le x'_n.$$

Звідси

$$f(x_n) \le f(a_m) \le f(x'_n).$$

Оскільки

$$f(x_n) \to f(x_0), f(x'_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty),$$

то

$$f(a_m) \to f(x_0)\ (m \to \infty).$$

Якщо $x_0 = 0$, то розглянемо послідовність (x_n): $x_n = \Delta^{Q^x}_{\underbrace{0\dots0}_{n}1(0)}$ і, очевидно, що $x_n \to x_0(+0)$; якщо $x_0 = 1$, то розглянемо послідовність (x'_n): $x'_n = \Delta^{Q^x}_{\underbrace{4\dots4}_{n}0(4)}$, звідки $x'_n \to x_0(-0)$.

Аналогічні міркування показують, що функція неперервна в цих точках справа та зліва відповідно.

II) Розглянемо випадок Q-ірраціональних точок

$$x_0 = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \alpha_1 = \overline{0,9}, \alpha_j = \overline{0,4}, j = \overline{2,n}.$$

Нехай $x_n = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}, x_n < x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$, тоді

$$x_0 - x_n = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots$$
$$+b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} + \cdots - (b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} +$$
$$+b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} +$$
$$+b_{0\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}} + b_{00}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{0\alpha_n} + b_{00}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{0\alpha_n}q_{00} +$$
$$+\cdots) = b_{\alpha_{n+1}\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}} + b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} +$$
$$+\cdots = q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}\left(b_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + \cdots\right).$$

Позначимо $\max_j\left\{q_{\alpha_j j}\right\} = q_{max}$, $A = b_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + \cdots \neq 0$. Оскільки $q_{max} < 1, q^n_{max} \to 0\ (n \to \infty)$, тоді останній вираз задовольняє умови:

$$0 \le x_0 - x_n \le q^n_{max}A \to 0\ (n \to \infty).$$

Отже, $x_n \to x_0(-0)$.

Аналогічно розглянемо $x'_n = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(4)}, x'_n > x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$, тоді

$$x'_n - x_0 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots +$$
$$+b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} + b_{4\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}} +$$
$$+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_n} + b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_n}q_{44} + \cdots - (b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} +$$
$$+b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \cdots + b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} +$$
$$+\cdots) = b_{4\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}} + b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_n} +$$
$$+b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{4\alpha_n}q_{44} + \cdots - b_{\alpha_{n+1}\alpha_n}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}} -$$
$$-b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} - \cdots = q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}(b_{4\alpha_n} -$$
$$-b_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + b_{44}q_{4\alpha_n} - b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + b_{44}q_{4\alpha_n}q_{44} -$$
$$-b_{\alpha_{n+3}\alpha_{n+2}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n}q_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}} + \cdots).$$

Позначимо $\max_j\left\{q_{\alpha_j j}\right\} = q_{max}$, $A = b_{4\alpha_n} - b_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + b_{44}q_{4\alpha_n} -$

$-b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} + b_{44}q_{4\alpha_n}q_{44} - b_{\alpha_{n+3}\alpha_{n+2}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n}q_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}} + \cdots \neq 0$. Оскільки $q_{max} < 1, q^n_{max} \to 0\ (n \to \infty)$, тоді останній вираз задовольняє умови:

$$0 \le x'_n - x_0 \le q^n_{max}A \to 0\ (n \to \infty).$$

Отже, $x'_n \to x_0(+0)$.

Аналогічно до випадку Q раціональних точок покажемо, що для Q ірраціональних виконується $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(x_0)$. Для цього розглянемо

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left|\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} - \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right| = |d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1} +$$

$$+d_{\alpha_3\alpha_2}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}+d_{\alpha_4\alpha_3}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_3\alpha_2}+\cdots+d_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}+$$
$$+d_{0\alpha_n}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{0\alpha_n}+d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{0\alpha_n}u_{00}+$$
$$+\cdots-(d_{\alpha_1}+d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1}+d_{\alpha_3\alpha_2}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}+d_{\alpha_4\alpha_3}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_3\alpha_2}+\cdots$$
$$+d_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}+\cdots)|=|d_{0\alpha_n}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+$$
$$+d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{0\alpha_n}+d_{00}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{0\alpha_n}u_{00}+\cdots-$$
$$-d_{\alpha_{n+1}\alpha_n}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}-d_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}-\cdots|.$$

Введемо заміну $d_{0j}=0$, тоді

$$|f(x_n)-f(x_0)|=|-d_{\alpha_{n+1}\alpha_n}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}-$$
$$-d_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}-\cdots|=|-u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}\cdot$$
$$\cdot(d_{\alpha_{n+1}\alpha_n}+d_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}+d_{\alpha_{n+3}\alpha_{n+2}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}u_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}+\cdots)|.$$

Позначимо $\max_j\left\{u_{\alpha_j j}\right\}=u_{max}$, $A=d_{\alpha_{n+1}\alpha_n}+d_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}+$ $+d_{\alpha_{n+3}\alpha_{n+2}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}u_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}+\cdots\neq 0$. Оскільки $u_{max}<1, u_{max}^n\to 0\ (n\to\infty)$, тоді останній вираз задовольняє умови:

$$|f(x_n)-f(x_0)|\to 0\ (n\to\infty)\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

Аналогічно $\lim_{n\to\infty}f(x_n')=f(x_0)$.

Отже, функція задана рівністю (1) є неперервною.

Властивість доведено.

Властивість 3. Функція, задана рівністю (1), має нескінченну кількість проміжків зростання та спадання.

Доведення. Розглянемо $x_1=\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m(0)}$ та $x_2=\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 1(0)}$, $x_2>x_1$, тоді

$$f(x_2)-f(x_1)=\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m 1(0)}-\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m(0)}=$$
$$=d_{\alpha_1}+d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1}+d_{\alpha_3\alpha_2}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}+\cdots+d_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}+$$
$$+d_{1\alpha_m}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}+d_{01}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{1\alpha_m}+$$
$$+d_{00}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{1\alpha_m}u_{01}+d_{00}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{1\alpha_m}u_{01}u_{00}+\cdots-$$
$$-(d_{\alpha_1}+d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1}+d_{\alpha_3\alpha_2}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}+\cdots+d_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{\alpha_1}u_{\alpha_2\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}+$$
$$+d_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}+d_{00}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}+$$
$$+d_{00}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}u_{00}+\cdots).$$

Замінимо $d_{0j}=0, j=\overline{0,4}$. Тоді

$$f(x_2)-f(x_1)=d_{1\alpha_m}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}=$$
$$=(-1)^{\alpha_m}u_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}.$$

Оскільки $u_{\alpha_j j}>0$, то $u_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}>0$. Звідси слідує, що $f(x_2)-f(x_1)>0$ при $\alpha_m\in\{0,2,4\}$ і $f(x_2)-f(x_1)<0$ при $\alpha_m\in\{1,3\}$.

Оскільки m – довільне фіксоване натуральне число, то функція має нескінченну кількість проміжків зростання та спадання, що й треба було довести.

Властивість 4. Функція, задана рівністю (1), є ніде не диференційовною.

Доведення.

I) Нехай розглянемо $x_0 = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)}$ та $x' = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\underbrace{0\ldots0}_{n}1(0)}$, тоді

$$\Delta x = x' - x_0 = \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\underbrace{0\ldots0}_{n}1(0)} - \Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)} =$$

$$= b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + \cdots + b_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} +$$
$$+ b_{0\alpha_m}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} + b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m} + \cdots +$$
$$+ b_{10}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2} + b_{01}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2}q_{10} +$$
$$+ b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2}q_{10}q_{01} + \cdots - (b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1}\ldots +$$
$$+ b_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} + b_{0\alpha_m}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}q_{\alpha_m\alpha_{m-1}} +$$
$$+ b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m} + \cdots + b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2} +$$
$$+ b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-1} + \cdots) = b_{10}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2} +$$
$$+ b_{01}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2}q_{10} + b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2}q_{10}q_{01} + \cdots -$$
$$- b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2} - b_{00}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-1} - \cdots.$$

Введемо заміну $b_{0j} = 0, j = \overline{0,4}$, тоді

$$\Delta x = b_{10}q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_m\alpha_{m-1}}q_{0\alpha_m}{q_{00}}^{n-2} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Знайдемо Δy

$$\Delta y = f(x') - f(x_0) = \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\underbrace{0\ldots0}_{n}1(0)} - \Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)} =$$

$$= d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1} + \cdots + d_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} +$$
$$+ d_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}} +$$
$$+ d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m} + \cdots + d_{10}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} +$$
$$+ d_{01}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}u_{10} + d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}u_{10}u_{01} + \cdots -$$
$$-(d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1} + \cdots + d_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}} +$$
$$+ d_{0\alpha_m}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}}u_{\alpha_m\alpha_{m-1}} + d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m} + \cdots +$$
$$+ d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} + d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-1} + \cdots) =$$
$$= d_{10}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} + d_{01}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}u_{10} +$$
$$+ d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2}u_{10}u_{01} + \cdots - d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} -$$
$$- d_{00}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-1} - \cdots.$$

Введемо заміну $d_{0j} = 0, j = \overline{0,4}$, тоді

$$\Delta y = d_{10}u_{\alpha_1}\ldots u_{\alpha_m\alpha_{m-1}}u_{0\alpha_m}{u_{00}}^{n-2} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Знайдемо границю відношення Δy до Δx

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{10}}{b_{10}}\frac{u_{\alpha_1}}{q_{\alpha_1}}\frac{u_{\alpha_2\alpha_1}}{q_{\alpha_2\alpha_1}}\dots\frac{u_{0\alpha_m}}{q_{0\alpha_m}}(\frac{u_{00}}{q_{00}})^{n-2}=\frac{d_{10}}{b_{10}}\frac{u_{\alpha_1}}{q_{\alpha_1}}\frac{u_{\alpha_2\alpha_1}}{q_{\alpha_2\alpha_1}}\dots\frac{u_{0\alpha_m}}{q_{0\alpha_m}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}(\frac{u_{00}}{q_{00}})^{n-2}=\infty,$$

оскільки $q_{ij}<u_{ij}$.

II) Нехай $x_0=\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ та $x'=\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}$, тоді

$$\Delta x=x_0-x'=\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}-\Delta^{Q^x}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}=$$
$$=b_{\alpha_1}+b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1}+\dots+b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}+$$
$$+b_{\alpha_{n+1}\alpha_n}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+\dots-(b_{\alpha_1}+b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1}+$$
$$+b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}+b_{0\alpha_n}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+$$
$$+b_{00}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{0\alpha_n}+\dots).$$

Замінимо за заданням функції $b_{0j}=0, j=\overline{0,4}$, тоді

$$\Delta x=b_{\alpha_{n+1}\alpha_n}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+b_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_{n+1}\alpha_n}+\cdots.$$

Оскільки x_0 – ірраціональна, то серед $\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\dots$ існує нескінченна кількість відмінних від нуля. Звідси слідує, що

$$\Delta x>b_{\alpha_k\alpha_{k-1}}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}},\alpha_k\neq 0,$$

де k – номер першої відмінної від нуля цифри починаючи з $(n-1)$ місця.

$$\Delta y=f(x_0)-f(x')=\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}-\Delta^{Q^y}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}=$$
$$=d_{\alpha_1}+d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1}+\dots+d_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}+$$
$$+d_{\alpha_{n+1}\alpha_n}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+\dots-(d_{\alpha_1}+d_{\alpha_2\alpha_1}u_{\alpha_1}+$$
$$+d_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}+d_{0\alpha_n}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+$$
$$+d_{00}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{0\alpha_n}+\dots).$$

Замінимо за заданням функції $b_{0j}=0, j=\overline{0,4}$, тоді

$$\Delta y=d_{\alpha_{n+1}\alpha_n}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+d_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{\alpha_{n+1}\alpha_n}+\cdots.$$

Оцінимо Δy:

$$\Delta y\le d_{4\alpha_n}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}+d_{44}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{4\alpha_n}+$$
$$+d_{44}u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}u_{4\alpha_n}u_{44}+\dots=u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}(d_{4\alpha_n}+d_{44}u_{4\alpha_n}+$$
$$+d_{44}u_{4\alpha_n}u_{44}+\cdots)=u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}(d_{4\alpha_n}+d_{44}u_{4\alpha_n}(1+u_{44}+$$
$$+u_{44}^2+\cdots))=u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}(d_{4\alpha_n}+d_{44}u_{4\alpha_n}\frac{1}{1-u_{44}}).$$

Замінимо $d_{4\alpha_n}=1-u_{4\alpha_n}, d_{44}=1-u_{44}$, тоді

$$\Delta y\le u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}\left(1-u_{4\alpha_n}+u_{4\alpha_n}\right)=u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}.$$

Знайдемо границю відношення Δy до Δx

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}>\lim_{n\to\infty}\frac{u_{\alpha_1}\dots u_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}u_{\alpha_n\alpha_{n-1}}}{b_{\alpha_k\alpha_{k-1}}q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}}}=$$

$$= \frac{1}{b_{\alpha_k \alpha_{k-1}}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_{\alpha_1}}{q_{\alpha_1}} \frac{u_{\alpha_2 \alpha_1}}{q_{\alpha_2 \alpha_1}} \dots \frac{u_{\alpha_n \alpha_{n-1}}}{q_{\alpha_n \alpha_{n-1}}} \frac{1}{q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} \cdots q_{\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}}}\right).$$

Оскільки $q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} \cdots q_{\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}} < 1,$ то $\frac{1}{q_{\alpha_{n+1}\alpha_n} \cdots q_{\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}}} > 1,$ а отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty.$$

Отже, функція, задана рівністю (1), є ніде не диференційовною, що і треба було довести.

Отже, в роботі досліджено властивості неперервності, монотонності та диференційовності функції, заданої перетворенням цифр аргумента, представленого за допомогою Q-зображення дійсних чисел, і цифр значення функції, яке задано модифікацією Q-зображення. Дана функція може використовуватись як математична модель часового ряду з складними властивостями. Зауважимо, що ряди такого типу часто виникають в задачах фінансового аналізу.

Список використаних джерел

1. Працевитый Н.В., Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992.
2. Вильямс Б. Торговый хаос. – Альпина Паблишер, 2018. – 310 с.
3. Peters E. E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics. - John Wiley & Sons, Inc, 1994. - 3j6 p.
4. Нитник А.С. Моделювання часових рядів за допомогою модифікацій Q-зображення дійсних чисел. Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2021. — No 21. — 123с.
5. Давидов, М. О. Курс математичного аналізу: підручник для студ. фіз-мат фак-тів пед. інс-тів. Ч.1-3- К. : Вища школа, 1976-1979.